

## Таблицы

1. (*Московская устная олимпиада, 2015, 6.1*) В первой строке таблицы записаны подряд все числа от 1 до 9. Можно ли заполнить вторую строку этой таблицы теми же числами от 1 до 9 в каком-нибудь порядке так, чтобы сумма двух чисел в каждом столбце оказалась точным квадратом?

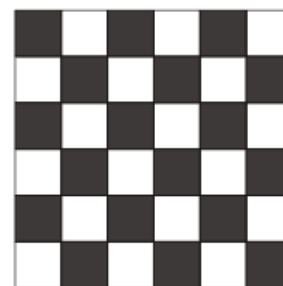
2. (*Математический праздник, 2016, 6.4*) Аня захотела вписать в каждую клетку таблицы  $5 \times 8$  по одной цифре таким образом, чтобы каждая цифра встречалась ровно в четырёх рядах. (Рядами мы считаем как столбцы, так и строчки таблицы.) Докажите, что у неё ничего не получится.

3. (*«Курчатов», 2018, 6.5*) В каждом поле таблицы  $15 \times 15$  записано число  $-1$ ,  $0$  или  $+1$  так, что сумма чисел в любой строке неположительна, а сумма чисел в любом столбце неотрицательна. Какое наименьшее количество нулей может быть записано в клетках таблицы?

4. (*Всеросс., 2017, МЭ, 7.4*) В трёх клетках таблицы  $3 \times 3$  стоят числа (см. рисунок). Требуется заполнить числами остальные клетки так, чтобы во всех строках, столбцах и главных диагоналях суммы чисел оказались равными. Докажите, что это можно сделать единственным способом, и заполните таблицу.

1		5
3		

5. (*Турнир Архимеда, 2019.3*) В каждой чёрной клетке на клетчатом поле  $6 \times 6$  (см. рис.) живёт гном, в каждой белой — эльф. Во вторник у каждого из них было не менее одной монеты. В среду каждый эльф дал каждому своему соседу-гному столько монет, сколько у этого гнома было во вторник. В пятницу каждый гном дал каждому своему соседу-эльфу столько монет, сколько у этого эльфа было в четверг. В другие дни монеты не передавались. Могло ли оказаться, что после этого у каждого эльфа и каждого гнома стало столько же монет, сколько было во вторник? Если да, приведите пример, если нет, объясните почему.



6. (Турнир Архимеда, 2013.5) В таблицу  $10 \times 10$  записаны числа от 0 до 99 (см. рисунок). Коля поставил перед некоторыми из них знак минус, но так, что в каждой строке и каждом столбце минус поставлен ровно у половины чисел. Затем он подсчитал сумму всех чисел в таблице. Какие значения суммы могли у него получиться?

0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
1	11	21	31	41	51	61	71	81	91
2	12	22	32	42	52	62	72	82	92
3	13	23	33	43	53	63	73	83	93
4	14	24	34	44	54	64	74	84	94
5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
6	16	26	36	46	56	66	76	86	96
7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
8	18	28	38	48	58	68	78	88	98
9	19	29	39	49	59	69	79	89	99

7. (Московская устная олимпиада, 2004, 7.5) Человек Рассеянный с улицы Бассейной ходит по клеткам доски  $4 \times 4$ . Находясь в клетке, он теряет в ней 1 рубль, после чего переходит в соседнюю по стороне клетку. Там он снова теряет 1 рубль и переходит, и так далее. На рисунке постарались указать, в какой клетке сколько рублей потеряно. Могло ли такое быть?

3	2	2	4
2	3	2	2
2	2	3	2
4	2	2	3

8. (Турнир Архимеда, 2016.6) а) Каждую клетку таблицы  $20 \times 15$  красят в один из двух цветов: белый или чёрный. Можно ли их окрасить так, чтобы у каждой клетки были ровно две соседние клетки другого цвета?

б) Тот же вопрос для таблицы  $20 \times 16$ .

(Соседними называются клетки, имеющие общую сторону.)

9. (Математический праздник, 2011, 7.6) Числа от 1 до 16 расставлены в таблице  $4 \times 4$ . В каждой строке, в каждом столбце и на каждой диагонали (включая диагонали из одной клетки) отметили самое большое из стоящих в ней чисел (одно число может быть отмечено несколько раз). Могли ли оказаться отмечены

а) все числа, кроме, быть может, двух?

б) все числа, кроме, быть может, одного?

в) все числа?

10. (Математический праздник, 2015, 7.6) Петя записал 25 чисел в клетки квадрата  $5 \times 5$ . Известно, что их сумма равна 500. Вася может попросить его назвать сумму чисел в любой клетке и всех её соседей по стороне. Может ли Вася за несколько таких вопросов узнать, какое число записано в центральной клетке?

11. (Московская устная олимпиада, 2012, 7.6) В каждой клетке таблицы  $10 \times 10$  записано число. В каждой строке подчеркнули наибольшее число (или одно из наибольших, если их несколько), а в каждом столбце — наименьшее (или одно из наименьших). Оказалось, что все подчеркнутые числа подчеркнуты ровно два раза. Докажите, что все числа, записанные в таблице, между собой равны.

**12.** (*Московская устная олимпиада, 2019, 6.7*) Клетки квадрата размером  $3 \times 3$  заполнили цифрами от 1 до 9, взятыми по одному разу, и подсчитали сумму чисел в каждой строке и в каждом столбце. Какое наибольшее количество идущих подряд целых чисел может быть среди этих сумм?