

Суммирование

1. (Всеросс., 2014, ШЭ, 10–11) Если число 100^{10} записать в виде суммы десятков $10 + 10 + \dots$, то сколько получится слагаемых?

6101

2. (Всеросс., 2019, ШЭ, 10.2) Вычислите:

$$\left(\frac{1+2}{3} + \frac{4+5}{6} + \frac{7+8}{9} + \dots + \frac{2017+2018}{2019} \right) + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{673} \right).$$

9181

3. (Всеросс., 2018, ШЭ, 10.5) Лёша не поленился вычислить сумму

$$9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{9 \dots 9}_{2017}$$

и выписать её на доску. Сколько раз в итоговом результате записана цифра 1?

2013

4. (ОММО, 2017) Представьте в виде несократимой дроби:

$$\frac{12+15}{18} + \frac{21+24}{27} + \dots + \frac{48+51}{54}.$$

171
20

Основной приём вычисления конечных сумм $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ — представить каждое слагаемое в виде разности таким образом, чтобы в результате почти всё сократилось.

5. Заметив, что $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, вычислите

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2014 \cdot 2015}.$$

2014
2015

6. Упростите выражение $k^2 - (k-1)^2$, после чего докажите, что:

$$\text{а) } 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2; \quad \text{б) } 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

7. Докажите, что

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n-1}{n!} = 1 - \frac{1}{n!}.$$

8. Докажите, что

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1.$$

9. Докажите, что

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \dots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

10. Докажите, что

$$\frac{5}{1 \cdot 2} + \frac{13}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{2n^2 + 2n + 1}{n(n+1)} = \frac{n(2n+3)}{n+1}.$$

11. Докажите, что

$$\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

12. Упростите выражение $k^3 - (k-1)^3$, после чего докажите, что

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

13. («Покори Воробьёвы горы!», 2013, 7) На сколько сумма $2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 100^2$ больше суммы $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 99^2$?

На 5050

14. («Покори Воробьёвы горы!», 2013, 8) а) Представьте число 2013 в виде суммы нескольких (более одного) последовательных натуральных чисел.

б) Выясните, какое наибольшее количество слагаемых может содержать такая сумма (при условии, что слагаемые — последовательные натуральные числа).

19 (9)

15. («Покори Воробьёвы горы!», 2013, 8–9) Сравните числа $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{2012}{2013!}$ и 1.

Первое число меньше

16. («Высшая проба», 2019, 8.2, 9.1) Вычислите сумму

$$1^2 + 2^2 - 3^2 - 4^2 + 5^2 + 6^2 - 7^2 - 8^2 + 9^2 + 10^2 - \dots + 2017^2 + 2018^2.$$

4074341

17. («Ломоносов», 2019, 9) Какое из чисел больше: $\frac{1}{99}$ или

$$\frac{1}{9903} + \frac{1}{9903 + 200} + \frac{1}{9903 + 200 + 202} + \dots + \frac{1}{9903 + 200 + 202 + \dots + 2018}?$$

Первое

18. («Ломоносов», 2019, 10–11) Про последовательность $\{a_n\}$ известно, что $a_1 = 1,5$ и $a_n = \frac{1}{n^2-1}$ при $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Существуют ли такие значения n , что сумма первых n членов этой последовательности отличается от 2,25 меньше, чем на 0,01? Если да, то найдите наименьшее из них.

001 = u, вГ

19. («Ломоносов», 2014, 10–11) Укажите целое число, ближайшее к числу

$$\sqrt{5000 - \sqrt{5001 \cdot 4999}} + \sqrt{4998 - \sqrt{4999 \cdot 4997}} + \dots + \sqrt{2 - \sqrt{3 \cdot 1}}.$$

67

20. («Ломоносов», 2014, 10–11) Вычислите:

$$\frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + 2013 \cdot 2014}{(1 + 2 + 3 + \dots + 2013) \cdot \frac{1}{6}}.$$

0908

21. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) Вычислите сумму

$$S = \frac{2014}{3 \cdot 7} + \frac{2014}{7 \cdot 11} + \frac{2014}{11 \cdot 15} + \dots + \frac{2014}{2011 \cdot 2015}.$$

В ответе укажите остаток от деления на 5 натурального числа, ближайшего к полученному значению S .

8

22. («Курчатов», 2017, 11) Пусть d_1, d_2, \dots, d_n — это все натуральные делители числа $10!$. Найдите сумму

$$\frac{1}{d_1 + \sqrt{10!}} + \frac{1}{d_2 + \sqrt{10!}} + \dots + \frac{1}{d_n + \sqrt{10!}}.$$

$\frac{7}{3}$