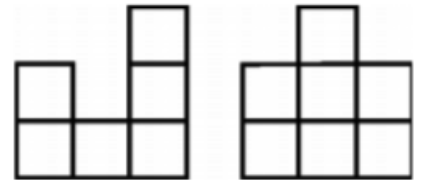


Стереометрия на олимпиаде «Покори Воробьёвы горы!»

1. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 9) Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Назовем точку *эквидистантной*, если найдутся две вершины куба, для которых эта точка является серединой отрезка. Сколько эквидистантных точек в кубе?

61

2. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 9) На уроке рисования учитель сложил из нескольких одинаковых кубиков фигуру, а Петров и Васечкин нарисовали её с двух различных точек зрения (см. рисунок). Из скольких кубиков могла состоять эта фигура? (В ответе укажите произведение наибольшего и наименьшего возможного значения.)



128

3. («Покори Воробьёвы горы!», 2019) Две смежные боковые грани пирамиды, в основании которой лежит квадрат, перпендикулярны плоскости основания. Двугранный угол между двумя другими боковыми гранями равен $\frac{2\pi}{3}$. Найдите отношение высоты пирамиды к стороне основания.

1

4. («Покори Воробьёвы горы!», 2019) В основании пирамиды $SABC$ лежит треугольник ABC со сторонами $AB = BC = 3\sqrt{2}$ и $AC = 2\sqrt{6}$. Высота пирамиды равна $\sqrt{6}$ и видна из вершин A и C под одним и тем же углом, равным $\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$. Под каким углом она видна из вершины B ?

 $\frac{8}{\sqrt{3}}$ и $\frac{8}{\sqrt{3}}$

5. («Покори Воробьёвы горы!», 2018) Развёртка боковой поверхности усечённого конуса с образующей, равной 12, представляет собой часть кругового кольца с центральным углом $\frac{2\pi}{3}$. Найдите радиусы оснований этого усечённого конуса, если площадь его поверхности равна площади полного кругового кольца.

 $10 + 2\sqrt{35}$ и $14 + 2\sqrt{35}$

6. («Покори Воробьёвы горы!», 2017) В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ сторона основания равна $\frac{2}{\sqrt{3}}$, а боковая сторона $AA_1 = 2$.

- Докажите, что в призму можно вписать шар, и найдите его радиус.
- Найдите объём наименьшей части шара, которую отсекает плоскость, проходящая через точки B , A_1 и E .

 $\frac{10\sqrt{5}-2\sqrt{10}}{14}$ (9)

7. («Покори Воробьёвы горы!», 2017) В треугольной пирамиде длины перпендикуляров, опущенных из четырёх вершин на противоположные грани, равны 3, 4, 7 и $\frac{84}{37}$ соответственно. Найдите радиус вписанного в эту пирамиду шара.

 $\frac{1}{9}$

8. («Покори Воробьёвы горы!», 2016) На плоскости основания конуса с высотой, равной радиусу основания, дана точка (вне конуса), удалённая от окружности основания на расстояние, равное двум радиусам основания. Найдите угол между касательными плоскостями к боковой поверхности конуса, проходящими через данную точку.

$$\arctg \frac{2}{\sqrt{5}}$$

9. («Покори Воробьёвы горы!», 2016) Двугранный угол при основании правильной треугольной пирамиды $SABC$ равен $\arctg 3$. В каком отношении делит боковую сторону SB сфера, центр которой лежит в плоскости основания, если известно, что вершины основания принадлежат сфере?

$$8 : 5$$

10. («Покори Воробьёвы горы!», 2016) Боковые рёбра SA , SB и SC треугольной пирамиды $SABC$ взаимно перпендикулярны. Точка D лежит на основании пирамиды ABC на расстоянии $\sqrt{5}$ от ребра SA , на расстоянии $\sqrt{13}$ от ребра SB и на расстоянии $\sqrt{10}$ от ребра SC . Какое наименьшее значение может иметь объём пирамиды $SABC$ при этих условиях?

$$\frac{27}{2}$$

11. («Покори Воробьёвы горы!», 2015) Через точку, лежащую на оси цилиндра радиуса $\sqrt{3}$ и отстоящую от ближайшего к ней основания цилиндра на расстояние 1, проведена плоскость. Найдите объём меньшей части цилиндра, отсекаемой этой плоскостью, если угол между осью цилиндра и плоскостью равен 60° .

$$3\pi$$

12. («Покори Воробьёвы горы!», 2015) Плоскость проходит через точку K , лежащую на ребре SA пирамиды $SABC$, и делит биссектрису SD грани SAB и медиану SE грани SAC пополам. В каком отношении эта плоскость делит объём пирамиды, если $SK : KA = SA : SB = 2$?

$$\frac{61}{911}$$

13. («Покори Воробьёвы горы!», 2014) Одно основание правильной n -угольной призмы ($n \geq 3$) имеет n общих точек со сферой радиуса 3; другое основание имеет с этой сферой одну общую точку. Какие значения может принимать объём призмы?

$$u \text{ и } n \text{ произвольным } u > 0 \text{ и } n \geq 3 \text{ при фиксированном } n; \text{ и } u > 0 \text{ и } n \geq 3 \text{ при произвольном } u$$

14. («Покори Воробьёвы горы!», 2014) На основании прямого кругового конуса расположены три попарно касающихся друг друга шара одинакового радиуса. Каждый из них касается также боковой поверхности конуса. Четвёртый шар того же радиуса касается первых трёх и боковой поверхности конуса. Найдите объём конуса, если радиус окружности, образованной точками касания четвёртым шаром боковой поверхности конуса, равен $\sqrt{2}$.

$$\frac{9}{3} \left(\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1 \right)$$

15. («Покори Воробьёвы горы!», 2014) В правильном тетраэдре $ABCD$ проведено сечение так, что оно проходит через точки K, L, M , лежащие на рёбрах DC, DB, DA соответственно. При этом $DK : KC = 1 : 3, DL : LB = 2 : 1, DM : MA = 1 : 1$. Найдите угол между плоскостями грани ABC и построенного сечения.

$$\arccos \frac{5\sqrt{3}}{13}$$

16. («Покори Воробьёвы горы!», 2013) Пять рёбер тетраэдра имеют длины 2, 4, 5, 9 и 13. Определите, может ли при этом длина шестого ребра:

- а) равняться 11;
- б) равняться 11,1.

а) Нет; б) нет

17. («Покори Воробьёвы горы!», 2013) Два равных конуса расположены так, что осью каждого из них является образующая другого. Углы при вершинах в осевых сечениях этих конусов равны по 90° . Найдите угол между двумя образующими, по которым пересекаются эти конусы.

$$2 \arccos \sqrt{6 - 3\sqrt{3}}$$

18. («Покори Воробьёвы горы!», 2013) Гора имеет форму правильной четырёхугольной пирамиды с основанием $ABCD$ и вершиной S , причём длина ребра основания равна 13 км, а боковые грани наклонены к основанию под углом β ($\cos \beta = 0,6$). Скорость туриста на ровной поверхности составляет 4 км/ч, а при подъёме или спуске под углом α к горизонту равна $4 \cos^2 \alpha$ км/ч. Может ли турист, находящийся в точке A , успеть на автобус, отходящий ровно через 6 часов 15 минут из точки C , если в середине пути он обязательно делает 9-минутную остановку?

Может

19. («Покори Воробьёвы горы!», 2012) Радиус сферы, вписанной в правильную треугольную пирамиду, равен R . Найдите величину двугранного угла при боковом ребре этой пирамиды, при которой максимален объём другой пирамиды, вершинами которой служат центр вписанной в исходную пирамиду сферы и точки касания этой сферы с боковыми гранями исходной пирамиды.

$$90^\circ$$

20. («Покори Воробьёвы горы!», 2012) В желобе, имеющем форму двугранного угла величины $2 \arcsin \frac{1}{3}$, неподвижно лежит шар радиуса 3, касаясь при этом обеих граней. Другой шар скользит вдоль желоба, также постоянно касаясь каждой из граней, и проскальзывает мимо неподвижно лежащего шара, не сталкиваясь с ним и даже не касаясь его. Найдите все возможные значения радиуса скользящего шара.

$$(\infty; 9) \cup (\frac{7}{3}; 0)$$

21. («Покори Воробьёвы горы!», 2011) В сферу радиуса $\sqrt{3}$ вписан параллелепипед, объём которого равен 8. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

$$24$$

22. («Покори Воробьёвы горы!», 2011) Рассматриваются плоские сечения правильной пирамиды $SABCD$, параллельные боковому ребру SB и диагонали основания AC , в которые можно вписать окружность. Какие значения может принимать радиус этих окружностей, если $AC = 1$, $\cos \angle SBD = \frac{2}{3}$?

$$\left\{ \frac{8}{11} \right\} \cap \left[\frac{9}{11}; 0 \right)$$

23. («Покори Воробьёвы горы!», 2010) Через точки M, N, K, L , лежащие соответственно на рёбрах SA, SB, SC, SD правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ (S — вершина), проведена плоскость. Известно, что $MK \perp NL$, $SN = 3 \cdot SL$ и площадь треугольника SMK равна 12. Найдите площадь треугольника SLN .

91

24. («Покори Воробьёвы горы!», 2010) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S и основанием $ABCD$ длины всех рёбер равны 1. Некоторая плоскость пересекает отрезки SA, SB, SC, SD в точках K, L, M, N соответственно. Какие значения может принимать площадь треугольника SLN , если $SK = \frac{1}{2}$ и $SM = \frac{1}{3}$?

$$\left[\frac{8}{11}; \frac{9\sqrt{2}}{8} \right]$$