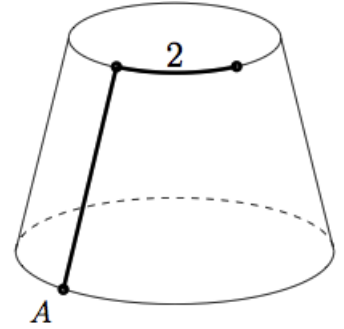


Стереометрия на ОММО

Задачи по стереометрии на [ОММО](#) требуют, как правило, хорошего пространственного воображения. Вычисления в них обычно минимальны.

1. (ОММО, 2019) Назовём *горой* усечённый прямой круговой конус с длиной окружности нижнего основания 8, а верхнего основания — 6. Склон горы наклонён под углом 60° к плоскости основания. На окружности нижнего основания лежит точка A . Турист начинает подъём по склону из точки A к ближайшей точке верхнего основания, а затем продолжает свой путь по краю верхнего основания, и проходит расстояние 2. После этого он возвращается в точку A кратчайшим маршрутом. Чему равна длина обратного пути?



$$\frac{\pi}{8\sqrt{3}}$$

2. (ОММО, 2018) Точки M , N и K расположены на боковых рёбрах AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ так, что $AM : AA_1 = 1 : 2$, $BN : BB_1 = 1 : 3$, $CK : CC_1 = 1 : 4$. Точка P принадлежит призме. Найдите наибольшее возможное значение объёма пирамиды $MNKP$, если объём призмы равен 16.

 $\frac{7}{4}$

3. (ОММО, 2017) В треугольной пирамиде $ABCD$ с основанием ABC боковые рёбра попарно перпендикулярны, $DA = DB = 2$, $DC = 5$. Из точки основания испускают луч света. Отразившись ровно по одному разу от каждой боковой грани (от рёбер луч не отражается), луч попадает в точку на основании пирамиды. Какое наименьшее расстояние мог пройти луч?

$$\frac{6}{9\sqrt{10}}$$

4. (ОММО, 2016, 11) Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна a , а высота — $a/2$. Найдите объём тела, ограниченного поверхностью этой пирамиды и сферами радиуса $a/3$ с центрами в вершинах основания этой пирамиды.

$$\frac{8\sqrt{3}}{9}$$

5. (ОММО, 2015, 11) В конус вписан цилиндр объёма 21. Плоскость верхнего основания этого цилиндра отсекает от исходного конуса усечённый конус объёмом 91. Найдите объём исходного конуса.

 $\frac{4}{5}$

6. (ОММО, 2014) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с рёбрами $AB = 3$, $AD = 4$ и $AA_1 = 5$ проведены два сечения — плоскостью, проходящей через диагональ $A_1 C$, и плоскостью, проходящей через диагональ $B_1 D$. Найдите наибольшее возможное значение суммы площадей поверхностей многогранников, на которые эти сечения разбивают данный параллелепипед.

 $\frac{1}{6}$

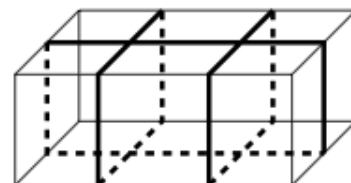
7. (ОММО, 2013) Коробка конфет имеет форму правильной шестиугольной призмы со стороной основания 10 и высотой $5\sqrt{3}$. Из двух разных вершин коробки $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ одновременно с одной и той же скоростью начинают двигаться две мухи, меняя направление движения только в вершинах. Одна муха начинает движение в вершине A и двигается только по рёбрам призмы, другая — только по диагоналям оснований и боковых граней. Через некоторое время мухи встречаются. В каких вершинах коробки может произойти встреча?

A, C, E

8. (ОММО, 2013) Единичный куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ повернут на 90° вокруг прямой, проходящей через середины противоположных рёбер AD и $B_1 C_1$. Найдите объём общей части исходного куба и повернутого.

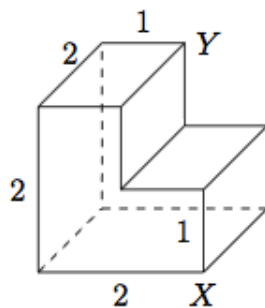
$\frac{3}{2} - \sqrt{2}$

9. (ОММО, 2012) Посылка должна быть упакована в ящик в форме прямоугольного параллелепипеда и перевязана один раз вдоль и два раза поперёк (см. рисунок). Можно ли отправить посылку объёма 63 дм^3 , имея $4,32 \text{ м}$ веревки (толщиной стенок ящика и уходящей на узлы веревкой пренебречь)?



Нет

10. (ОММО, 2011) На рисунке изображён многогранник, все двугранные углы которого прямые. Саша утверждает, что кратчайший путь по поверхности этого многогранника от вершины X до вершины Y имеет длину 4. Прав ли он?



Нет

11. (ОММО, 2010) Один фермер сварил сыр в виде неправильной пятиугольной призмы, а другой — в виде правильной четырехугольной пирамиды, высота которой в 2 раза меньше стороны основания. Ночью мыши отъели от всех вершин этих многогранников все частицы сыра, которые находились на расстоянии не большем 1 см от соответствующей вершины. У съеденных кусков сыра не было общих частиц. Какой из фермеров понес больший ущерб и во сколько раз?

У первого в 4,5 раза больше

12. (ОММО, 2009) Тетраэдр с ребром 1 повернули на 90° относительно прямой, соединяющей середины противоположных рёбер. Найдите объём общей части нового и исходного тетраэдров.

$\frac{\sqrt{2}}{24}$