Стереометрия на олимпиаде «Физтех»

1. (*«Физтех», 2019*) На рёбрах AC, BC, BS, AS правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S выбраны точки K, L, M, N соответственно. Известно, что точки K, L, M, N лежат в одной плоскости, причём $KL = MN = 2$, $KN = LM = 18$. В четырёхугольнике $KLMN$ расположены две окружности Ω_1 и Ω_2, причём окружность Ω_1 касается сторон KN, KL и LM, а окружность Ω_2 касается сторон KN, LM и MN. Прямые круговые конусы $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ с основаниями Ω_1 и Ω_2 соответственно расположены внутри данной пирамиды, причём вершина P конуса $\mathcal{F}_1$ лежит на ребре AB, а вершина Q конуса $\mathcal{F}_2$ лежит на ребре CS.

а) Найдите $\angle SAB$.

б) Найдите длину отрезка CQ.

а) $\angle SAB = \arccos\frac{1}{6}$; б) $CQ = \frac{52}{3}$

2. (*«Физтех», 2019*) Дана усечённая пирамида $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1 ($ABC \parallel A_1B_1C_1$), такая, что треугольник ABA_1 — равносторонний. На ребре CC_1, перпендикулярном основанию ABC пирамиды, лежит точка M такая, что $CM : MC_1 = 1 : 2$. Сфера Ω с радиусом $\sqrt{5}$ проходит через вершины треугольника ABA_1 и касается отрезка CC_1 в точке M.

а) Найдите длину ребра AB.

б) Пусть дополнительно известно, что $\angle BAC = \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$. Найдите угол между прямой CC_1 и плоскостью ABA_1, а также длину ребра A_1C_1.

а) $AB = \sqrt{15}$; б) $\angle(CC_1, ABA_1) = \arcsin\frac{1}{\sqrt{6}}$, $A_1C_1 = \sqrt{\frac{5}{2}}$

3. (*«Физтех», 2018*) Ребро A_1A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярно его грани $ABCD$. Сфера Ω касается рёбер BB_1, B_1C_1, C_1C, CB, CD, и при этом касается ребра CD в такой точке K, что $CK = 4$, $KD = 1$.

а) Найдите длину ребра A_1A.

б) Пусть дополнительно известно, что сфера Ω касается ребра A_1D_1. Найдите объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и радиус сферы Ω.

$A_1A = 8$; $V = 256$, $R = 2\sqrt{5}$

4. (*«Физтех», 2018*) На ребре BC параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ выбрана точка M. Сфера, построенная на отрезке C_1M как на диаметре, касается плоскостей четырёх граней параллелепипеда, причём одной из них в точке, лежащей на ребре B_1B. Известно, что $BM = 1$, $CM = 8$. Найдите длину ребра AA_1, радиус сферы и объём параллелепипеда.

$AA_1 = 10$, $R = 3$, $V = 162$

5. (*«Физтех», 2017*) Основание треугольной пирамиды $ABCD$ — правильный треугольник ABC. Объём пирамиды равен $\frac{25}{\sqrt{3}}$, а её высота, проведённая из вершины D, равна 3. Точка M — середина ребра CD. Известно, что радиусы сфер, вписанных в пирамиды $ABCM$ и $ABDM$, равны между собой.

а) Найдите все возможные значения угла между гранями пирамиды при ребре AB.

б) Найдите все возможные значения длины ребра CD, если дополнительно известно, что грани BCD и ABC взаимно перпендикулярны.

а) $\arccos\left(\pm\frac{4}{5}\right)$; б) $\sqrt{\frac{31}{3}}$ или $3\sqrt{13}$

6. (*«Физтех», 2017*) Рассматриваются четырёхугольные пирамиды $MABCD$ со следующими свойствами: основание пирамиды — выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = 1$, $CD = DA = 2$, а каждая из плоскостей боковых граней MAB, MBC, MCD, MDA составляет угол 45° с плоскостью основания.

а) Найдите объём такой пирамиды, если её высота, опущенная из вершины M, равна $\frac{9}{5}$.

б) При какой длине высоты объём рассматриваемых пирамид максимален и чему равен этот объём?

а) $\frac{27}{25}$; б) $\frac{4}{3}$

7. (*«Физтех», 2016*) Дана правильная призма $KLMNK_1L_1M_1N_1$ с основанием $KLMN$. Плоскости α и β перпендикулярны L_1N и проходят через вершины K и N_1 соответственно. Пусть A и B соответственно — точки пересечения плоскостей α и β с диагональю L_1N, при этом $AN < BN$.

а) Найдите отношение $L_1B : AN$.

б) Пусть дополнительно известно, что сфера радиуса $1/2$ касается всех боковых граней призмы, а также плоскостей α и β. Найдите отрезок L_1N и объём призмы $KLMNK_1L_1M_1N_1$.

а) $2:1$; б) $L_1N = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$, $V = \frac{1}{2}\sqrt{6+2\sqrt{13}}$

8. (*«Физтех», 2016*) Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Сфера с диаметром AC пересекает рёбра AB и BC соответственно в точках F и N, отличных от вершин призмы. Отрезки C_1F и A_1N пересекаются в точке P, и при этом $A_1N = 7$, $C_1P = 6$.

а) Найдите угол PFA.

б) Найдите отношение $AF : FB$.

в) Пусть дополнительно известно, что $AB = 6$. Найдите объём призмы.

а) 90°; б) $5:1$; в) $21\sqrt{10}$

9. (*«Физтех», 2016*) Высота правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 12. Сфера Ω радиуса $\sqrt{35/3}$ касается всех боковых граней призмы. На отрезках AA_1 и BB_1 выбраны соответственно точки K и L такие, что $KL \parallel AB$, а плоскости KBC и LA_1C_1 касаются сферы Ω. Найдите объём призмы и длину отрезка AK.

$V = 420\sqrt{3}$; $AK = 8$ или $AK = 4$

10. (*«Физтех», 2015*) На ребре BB_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ взята точка T такая, что $BT : B_1T = 2 : 5$. Точка T является вершиной прямого кругового конуса, такого, что три вершины призмы принадлежат окружности его основания.

а) Найдите отношение высоты призмы к ребру её основания

б) Пусть дополнительно известно, что $CC_1 = 7$. Найдите объём конуса.

а) $\sqrt{\frac{7}{3}}$; б) $\frac{3500\pi}{37\sqrt{37}}$

11. (*«Физтех», 2015*) На ребре SA правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S отмечена точка K такая, что $AK : KS = 1 : 4$. Точка K является вершиной прямого кругового конуса, на окружности основания которого лежат три вершины пирамиды $SABCD$.

а) Найдите отношение $DS : BC$.

б) Пусть дополнительно известно, что высота пирамиды $SABCD$ равна 5. Найдите объём конуса.

а) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{64\pi}{\sqrt{15}}$

12. (*«Физтех», 2015*) В основании четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ находится ромб $ABCD$, в котором $CD = 3$ и $\angle ABD = 30^\circ$. Сфера проходит через вершины D, C, B, B_1, A_1, D_1.

а) Найдите площадь круга, полученного в сечении сферы плоскостью, проходящей через точки A, C и D.

б) Найдите угол C_1AB.

в) Пусть дополнительно известно, что радиус сферы равен 6. Найдите объём призмы.

а) 9π; б) 90°; в) 81

13. (*«Физтех», 2014*) Даны пирамида $ABCD$ и сфера. Ребро AC пирамиды является диаметром сферы; прямые, содержащие три других ребра, касаются сферы, а середины двух оставшихся рёбер лежат на сфере. Найдите угол ABC, длину ребра BD и объём пирамиды $ABCD$, если $AC = 6$.

45°, 12, $18\sqrt{3}$

14. (*«Физтех», 2014*) В треугольной пирамиде $SABC$ из вершины S опустили высоту SH. Известно, что $AB > BC$, $AB > AC$. Сфера, построенная на отрезке SH как на диаметре, проходит через середины четырёх рёбер пирамиды, и её радиус равен 3.

а) Найдите длину ребра AB и угол ACB.

б) Пусть дополнительно известно, что прямая, проходящая через вершину C и середину ребра SA, касается сферы. Найдите объём пирамиды $SABC$.

12, 90°, $36\sqrt{3}$

15. (*«Физтех», 2013*) В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $BC = 4$. Сфера ω касается плоскости основания пирамиды и касается всех трёх её боковых рёбер в их серединах. Пусть Ω — сфера, описанная около пирамиды $SABC$.

а) Найдите расстояние между центрами сфер ω и Ω.

б) Найдите отношение радиусов сфер ω и Ω.

в) Пусть дополнительно известно, что угол между гранями SAB и ABC равен $\operatorname{arctg} 2$. Найдите объём пирамиды $SABC$.

а) 0; б) $1 : 2$; в) 4

16. (*«Физтех», 2013*) Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ вписана в цилиндр (основания призмы вписаны в окружности оснований цилиндра). Плоскость α имеет ровно одну общую точку с каждым из оснований цилиндра и пересекает рёбра AA_1, BB_1 и CC_1 в точках K, N, P соответственно. Найдите отношения $CP : PC_1$ и $BN : NB_1$, если $AK : KA_1 = 1 : 12$.

$CP : PC_1 = 25 : 27$, $BN : NB_1 = 49 : 3$ или $CP : PC_1 = 49 : 3$, $BN : NB_1 = 25 : 27$

17. (*«Физтех», 2012*) На ребре BB_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ выбрана точка Q так, что центр сферы, описанной около пирамиды QAA_1C_1C, лежит в грани AA_1C_1C. Известно, что радиус сферы, описанной около пирамиды $QABC$, равен 2, а ребро основания призмы равно $\sqrt{3}$. Найдите:

а) отношение объёма пирамиды QAA_1C_1C к объёму призмы;

б) длину отрезка QB;

в) объём призмы.

а) $2:3$; б) $2\sqrt{3}$; в) $\frac{81}{16}$

18. (*«Физтех», 2012*) Рассматриваются всевозможные правильные шестиугольные пирамиды, боковые рёбра которых равны a.

а) Найдите наибольший возможный объём рассматриваемых пирамид.

б) Для пирамиды наибольшего объёма найдите угол между соседними боковыми гранями.

а) $\frac{a^3}{3}$; б) $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$

19. (*«Физтех», 2011*) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания ABC равна 2, боковое ребро равно 3. Сфера с центром O на прямой SB касается рёбер SA, SC и AC. Найдите расстояния от центра сферы до плоскостей ASC и ABC, а также радиус сферы.

$\frac{3}{7}\sqrt{\frac{23}{2}}$; $\frac{1}{7}\sqrt{\frac{23}{3}}$; $\frac{8\sqrt{2}}{7}$

20. (*«Физтех», 2011*) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания ABC равна 2, боковое ребро равно 5. Сфера с центром O на плоскости ABS касается рёбер SC, SD и CD. Найдите расстояния от центра сферы до плоскостей ABC и BCS, а также радиус сферы.

$\frac{\sqrt{23}}{11}$; $\frac{8}{11}\sqrt{\frac{23}{6}}$; $\frac{4\sqrt{29}}{11}$

21. (*«Физтех», 2010*) Основанием треугольной пирамиды $SABC$ является правильный треугольник ABC со стороной 5. Боковое ребро SC перпендикулярно основанию и имеет длину 12. Сфера, центр O которой лежит в плоскости SBC, касается рёбер SA, AB и AC в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите AA_1, расстояние от точки O до ребра BC и радиус сферы.

$\frac{15}{4}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{5\sqrt{7}}{4}$

22. (*«Физтех», 2010*) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $ABCD$ равна $\sqrt{2}$, угол между боковым ребром и плоскостью основания равен $\operatorname{arctg} 2$. Точка K лежит на высоте SO, причём $KO : SO = 3 : 4$. Через точку K проведена плоскость Π, перпендикулярная прямой SC. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью Π, расстояние от точки B до плоскости Π и угол между плоскостью Π и прямой SB.

$\frac{1}{3\sqrt{5}}$; $\frac{3}{\sqrt{5}}$; $\arcsin\frac{4}{5}$

23. (*«Физтех», 2009*) В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит трапеция $ABCD$, в которой $AB = BC = CD = 2$, $AD = 4$. Точки K, L, M лежат на отрезках A_1B, B_1C, C_1D соответственно так, что

$$\frac{A_1K}{KB} = \frac{B_1L}{LC} = \frac{C_1M}{MD} = 4.$$

Сфера радиуса $R = 2$ касается прямых A_1B, B_1C, C_1D в точках K, L, M соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника KLM, расстояние от центра сферы до плоскости KLM и объём призмы.

$\frac{2\sqrt{21}}{5}$; $\frac{4}{5}$; $3\sqrt{3}$

24. (*«Физтех», 2009*) На ребре AB треугольной пирамиды $ABCD$ выбрана точка X такая, что $AX : XB = 4$. Точки K и L — проекции точки X на плоскости ACD и BCD соответственно. Известно, что $KC = 3$, $KD = 7$, $KA = 13$, $LC = 9$, $LB = \frac{7}{2}$. Найдите длину отрезка LD, высоту пирамиды, опущенную из вершины A, и угол между ребром AB и плоскостью BCD.

$\boxed{11;\ 5\sqrt{3};\ \arcsin\sqrt{\frac{12}{61}}}$

25. (*«Физтех», 2008*) В основании пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Сфера ω радиуса $\frac{77}{20}$ с центром O касается рёбер AS, BS, AD, BC пирамиды $SABCD$ соответственно в точках K, L, M, N, пересекает ребро AB в точках P и Q и касается грани CDS. Известно, что прямая SO перпендикулярна плоскости $ABCD$ и пересекает её в точке H, $\frac{PQ}{AB} = \sqrt{\frac{23}{72}}$, $\frac{AK}{BS} = \frac{1}{3}$. Найдите углы SAB и BSH, высоту пирамиды и её объём.

$\boxed{\arccos\frac{2\sqrt{2}}{37};\ \arcsin\frac{11}{21};\ 8;\ \frac{576\sqrt{2}}{5}}$

26. (*МФТИ, 2008*) В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$, причём $AB = 3$, $SC = 8$. Пусть N — середина SB, M — середина SC, причём $BN = MC = 4MN$. Каким может быть минимальный радиус сферы, описанной около пирамиды $SABCD$? Найдите объём пирамиды $SABCD$, вписанной в эту сферу (минимального радиуса).

$\boxed{\frac{32}{\sqrt{63}};\ \frac{\sqrt{206451}}{31}}$

27. (*МФТИ, 2008*) Грани ABC и ABD пирамиды $ABCD$ ортогональны и являются равными равнобедренными треугольниками с общим основанием AB. Известно, что $AB = 3$, $CD = 2$. Найдите угол между прямыми AC и BD, расстояние между прямыми AC и BD и радиус сферы, описанной вокруг пирамиды $ABCD$.

$\boxed{\arccos\frac{9}{17};\ \frac{6}{\sqrt{13}};\ \frac{\sqrt{145}}{8}}$

28. (*«Физтех», 2007*) Внутри прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расположены два шара ω_1 и ω_2, касающиеся друг друга внешним образом; кроме того, шар ω_1 касается граней $ABCD$, CDD_1C_1, BCC_1B_1, а шар ω_2 касается граней $A_1B_1C_1D_1$, ADD_1A_1, ABB_1A_1. Известно, что $C_1D_1 = 20 - \sqrt{11}$, $AD = 20$, $BB_1 = 20 + \sqrt{11}$. Найти расстояние между центрами шаров ω_1 и ω_2. Найти наибольший и наименьший суммарный объём шаров.

$\boxed{d = 13;\ V_{\max} = \left(\frac{4537}{3} - 182\sqrt{11}\right)\pi,\ V_{\min} = \frac{2197\pi}{3}}$