Сечения

Задача 1. (*МГУ, мехмат, 2003-07.6*) Высота AH тетраэдра $ABCD$ пересекается с его высотой BE, но не лежит в одной плоскости ни с одной из других его высот. На отрезке $HE = 4$ взята точка O, равноудаленная от граней тетраэдра, образующая двугранный угол в 30° при ребре $CD = 5$. Найти площадь сечения тетраэдра, проходящего через точку O и являющегося прямоугольником.

$\boxed{10\left(2-\sqrt{3}\right)}$

Задача 2. (*Моск. матем. регата, 2013, 11*) В кубе с ребром длины 1 провели два сечения в виде правильных шестиугольников. Найдите длину отрезка, по которому эти сечения пересекаются.

$\boxed{\sqrt{2}}$

Задача 3. (*Всеросс., 1995, ОЭ, 11*) В прямоугольном параллелепипеде одно из сечений является правильным шестиугольником. Докажите, что этот параллелепипед — куб.

Задача 4. (*Всеросс., 1993, ОЭ, 11*) Семь треугольных пирамид стоят на столе. Для любых трёх из них существует горизонтальная плоскость, которая пересекает их по треугольникам равной площади. Доказать, что существует плоскость, пересекающая все семь пирамид по треугольникам равной площади.

Задача 5. (*Всеросс., 1996, финал, 11*) Докажите, что при $n \geqslant 5$ сечение пирамиды, в основании которой лежит правильный n-угольник, не может являться правильным $(n+1)$-угольником.

Задача 6. (*Всеросс., 2004, финал, 11*) В прямоугольном параллелепипеде проведено сечение, являющееся шестиугольником. Известно, что этот шестиугольник можно поместить в некоторый прямоугольник П. Докажите, что в прямоугольник П можно поместить одну из граней параллелепипеда.

Задача 7. (*Всеросс., 1993, финал, 11*) Докажите, что если два прямоугольных параллелепипеда имеют равные объёмы, то их можно расположить в пространстве так, что любая горизонтальная плоскость, пересекающая один из них, будет пересекать и второй, причем по многоугольнику той же площади.

Задача 8. (*Турнир городов, 2003, 10–11*) Некоторый куб рассекли плоскостью так, что в сечении получился пятиугольник. Докажите, что длина одной из сторон этого пятиугольника отличается от 1 метра по крайней мере на 20 сантиметров.

Задача 9. (*Турнир городов, 2011, 10–11*) От балки в форме треугольной призмы с двух сторон отпилили (плоской пилой) по куску. Спилы не задели ни оснований, ни друг друга.

а) Могут ли спилы быть подобными, но не равными треугольниками?

б) Может ли один спил быть равносторонним треугольником со стороной 1, а другой — равносторонним треугольником со стороной 2?

Задача 10. (*Турнир городов, 1990, 10–11*) Можно ли так выбрать шар, треугольную пирамиду и плоскость, чтобы всякая плоскость, параллельная выбранной, пересекала шар и пирамиду по фигурам равной площади?

Задача 11. (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2006, 10–11*) Основанием пирамиды служит выпуклый четырёхугольник. Обязательно ли существует сечение этой пирамиды, не пересекающее основание и являющееся вписанным четырёхугольником?