

Квадратные уравнения

Содержание

1	Неполные квадратные уравнения	1
2	Выделение полного квадрата	1
3	Формула корней	2
4	Упрощённая формула корней при чётном b	3
5	Теорема Виета	3
6	Разложение квадратного трёхчлена на множители	7
7	Задачи	7

В данной статье мы разберём основные вопросы, связанные с квадратным уравнением: выведем формулу корней, докажем теорему Виета и научимся раскладывать квадратный трёхчлен на множители.

Квадратное уравнение — это уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0. \quad (1)$$

Числа a , b и c называются *коэффициентами* уравнения (1). Выражение $ax^2 + bx + c$, в котором $a \neq 0$, называется *квадратным трёхчленом*.

1 Неполные квадратные уравнения

Квадратное уравнение (1) называется *неполным*, если $b = 0$ или $c = 0$. В этих тривиальных случаях совершенно ясно, как надо действовать.

ЗАДАЧА 1. Решить уравнение $2x^2 - 5 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Имеем:

$$2x^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

ЗАДАЧА 2. Решить уравнение $x^2 + 3x = 0$.

РЕШЕНИЕ. Имеем:

$$x(x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = -3. \end{cases}$$

2 Выделение полного квадрата

Любое квадратное уравнение можно решить, не помня формулу корней. Для этого нужно выделить полный квадрат.

ЗАДАЧА 3. Решить уравнение $x^2 + 4x - 5 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Прибавим к обеим частям по 9:

$$x^2 + 4x + 4 = 9 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 3, \\ x + 2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = -5. \end{cases}$$

ЗАДАЧА 4. Решить уравнение $2x^2 - 9x + 3 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Умножим обе части уравнения на 2:

$$\begin{aligned} 4x^2 - 18x = -6 &\Leftrightarrow (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot \frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{81}{4} - 6 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(2x - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{57}{4} \Leftrightarrow 2x - \frac{9}{2} = \pm \frac{\sqrt{57}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{57}}{4}. \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 5. Решить уравнение $x^2 + 5x + 7 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Имеем:

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{5}{2} + \frac{25}{4} = \frac{25}{4} - 7 \Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4}.$$

Решений нет.

3 Формула корней

Процедуру выделения полного квадрата можно применить к уравнению (1) в общем случае. Именно так получается хорошо известная вам формула вычисления корней квадратного уравнения. Имеем:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\Leftrightarrow a^2x^2 + abx + ac = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (ax)^2 + 2ax \cdot \frac{b}{2} + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4} - ac \Leftrightarrow \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4}. \end{aligned}$$

Величина $D = b^2 - 4ac$ называется *дискриминантом* уравнения (1). Таким образом,

$$\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{D}{4}. \quad (2)$$

В зависимости от значения дискриминанта возможны три случая.

1. $D < 0$. Тогда уравнение (2) не имеет корней. Следовательно, не имеет корней и равносильное ему уравнение (1).
2. $D = 0$. Тогда уравнение (2) — а значит, и уравнение (1) — имеет единственный корень:

$$\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow ax + \frac{b}{2} = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = -\frac{b}{2a}}. \quad (3)$$

3. $D > 0$. Тогда уравнение (2) — а значит, и уравнение (1) — имеет два различных корня:

$$ax + \frac{b}{2} = \pm \frac{\sqrt{D}}{2} \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}}. \quad (4)$$

Формула (4) как раз и есть формула корней квадратного уравнения (1). Легко видеть, что формула (3) является её частным случаем при $D = 0$.

4 Упрощённая формула корней при чётном b

При $b = 2k$ возникает полезная модификация формулы (4). Рассмотрим уравнение

$$ax^2 + 2kx + c = 0. \quad (5)$$

Его дискриминант:

$$D = 4k^2 - 4ac = 4(k^2 - ac).$$

Тогда формула (4) даёт:

$$x = \frac{-2k \pm \sqrt{4(k^2 - ac)}}{2a} = \frac{-2k \pm 2\sqrt{k^2 - ac}}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Это и есть формула для корней уравнения (5). Учитывая ещё, что $k^2 - ac = D/4$, запишем эту формулу в виде:

$$\boxed{x = \frac{-k \pm \sqrt{D/4}}{a}}. \quad (6)$$

Знать эту формулу очень рекомендуется — она поможет вам сэкономить драгоценное время на экзамене.

ЗАДАЧА 6. Решить уравнение $3x^2 + 26x - 64 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Здесь $k = 13$, так что имеем:

$$D/4 = 13^2 + 3 \cdot 64 = 169 + 192 = 361 = 19^2,$$

откуда

$$x = \frac{-13 \pm 19}{3}; \quad x_1 = 2, \quad x_2 = -\frac{32}{3}.$$

Вычисления по формуле (4) были бы сложнее, в чём вы сами легко можете убедиться.

5 Теорема Виета

Оказывается, корни квадратного уравнения связаны с его коэффициентами весьма простыми соотношениями.

ТЕОРЕМА ВИЕТА. Пусть квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корни x_1 и x_2 (допускается и случай $x_1 = x_2$ при $D = 0$). Тогда справедливы *формулы Виета*:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формулы Виета доказываются прямым вычислением с помощью формулы корней (4):

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = -\frac{b}{a}; \\ x_1 x_2 &= \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{(-b)^2 - D}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

Теорему Виета можно переформулировать так: если хотя бы одна из формул Виета (7) не выполнена, то хотя бы одно из чисел x_1, x_2 не является корнем уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Это удобно использовать для проверки корней, вычисленных по формулам (4) или (6). Пусть, например, требуется решить уравнение

$$3x^2 + 2x - 8 = 0.$$

Применяя стандартную процедуру, находим:

$$D/4 = 1 + 3 \cdot 8 = 25; \quad x = \frac{-1 \pm 5}{3}; \quad x_1 = \frac{4}{3}, \quad x_2 = -2.$$

После этого полезно потратить несколько секунд и проверить формулы Виета:

$$x_1 + x_2 = \frac{4}{3} - 2 = -\frac{2}{3},$$

что как раз и равно $-b/a$; также

$$x_1 x_2 = \frac{4}{3} \cdot (-2) = -\frac{8}{3},$$

что как раз и равно c/a . А вот если бы одна из формул Виета дала неверный результат, то это означало бы, что при вычислении корней где-то допущена ошибка.

Возьмите за правило каждый раз делать в уме такую проверку — это очень полезная привычка. Часто бывает так, что квадратное уравнение является звеном решения более сложной задачи, и ошибка при нахождении корней автоматически делает неверным всё дальнейшее решение. Теорема Виета в таких ситуациях — важная промежуточная страховка.

Однако формулы Виета годятся не только в качестве теста на отсутствие вычислительной ошибки — сфера их применения гораздо шире. В частности, с помощью формул Виета можно искать корни!

ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМА ВИЕТА. Пусть числа a, b, c, x_1 и x_2 связаны соотношениями

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Тогда x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выразим x_2 из первой формулы Виета:

$$x_2 = -\frac{b}{a} - x_1,$$

и подставим во вторую:

$$x_1 \left(-\frac{b}{a} - x_1 \right) = \frac{c}{a} \Leftrightarrow x_1^2 + \frac{b}{a}x_1 + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow ax_1^2 + bx_1 + c = 0.$$

Как видим, x_1 является корнем уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. То же самое верно и для x_2 (это очевидно и без вычислений, поскольку x_1 и x_2 входят в формулы Виета симметрично).

ЗАДАЧА 7. Решить уравнение $x^2 - 35x + 124 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Давайте попробуем найти два числа, сумма которых равна 35, а произведение равно 124. Вот они: 31 и 4. В силу обратной теоремы Виета это и есть корни данного уравнения.

ЗАДАЧА 8. Решить уравнение $x^2 + 2013x - 2014 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Вычислять здесь дискриминант и пользоваться формулой корней — не самое приятное занятие. Но это и не нужно. Легко видеть, что $x_1 = 1$ является корнем данного уравнения. Тогда второй корень находится из формул Виета: $x_2 = -2014$.

К сожалению, подбор корней с помощью формул Виета проходит лишь тогда, когда корни «хорошие» (то есть когда дискриминант является точным квадратом). Например, найти подбором корни уравнения $x^2 + 7x + 3 = 0$ почти нереально, так как они иррациональны ($D = 37$). А в случае уравнения $x^2 + 7x + 13 = 0$ корни можно подбирать до бесконечности — их вообще нет (дискриминант отрицателен).

Рассмотрим ещё несколько задач на теорему Виета.

ЗАДАЧА 9. Не решая уравнения $2x^2 - 7x + 4 = 0$, найти сумму квадратов его корней.

РЕШЕНИЕ. Дискриминант равен 17, так что корни x_1 и x_2 существуют. Имеем:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{4}{2} = \frac{33}{4}.$$

ЗАДАЧА 10. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + 3x - 5 = 0$. Составьте квадратное уравнение, корни которого равны $1/x_1$ и $1/x_2$.

РЕШЕНИЕ. Обозначим $t_1 = 1/x_1$ и $t_2 = 1/x_2$. Имеем:

$$t_1 + t_2 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}; \quad t_1t_2 = \frac{1}{x_1x_2} = -\frac{1}{5}.$$

Следовательно, искомое квадратное уравнение имеет вид

$$0 = t^2 - (t_1 + t_2)t + t_1t_2 = t^2 - \frac{3}{5}t - \frac{1}{5}$$

или, домножая на 5,

$$5t^2 - 3t - 1 = 0.$$

ЗАДАЧА 11. (МГУ, мехмат, 2007) Графики двух функций

$$f(x) = 2x^2 + 2x - 3 \quad \text{и} \quad g(x) = -3x^2 - 2x + 1$$

пересекаются в двух точках. Найдите коэффициенты a и b в уравнении прямой $y = ax + b$, проходящей через те же точки.

РЕШЕНИЕ. Абсциссы точек пересечения удовлетворяют уравнению $f(x) = g(x)$, то есть

$$2x^2 + 2x - 3 = -3x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow 5x^2 + 4x - 4 = 0. \tag{8}$$

Дискриминант квадратного уравнения (8) положителен, поэтому оно имеет два различных корня x_1 и x_2 (что, собственно, и сказано в условии). Оба они иррациональны, и вычисление координат точек пересечения с последующим нахождением уравнения прямой, проходящей через эти точки, приведёт к громоздким вычислениям.

Будем действовать по-другому. В силу теоремы Виета

$$x_1 + x_2 = -\frac{4}{5}, \quad x_1x_2 = -\frac{4}{5}.$$

Теперь учтём, что через точки пересечения, имеющие координаты $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$, проходит прямая $y = ax + b$:

$$\begin{cases} 2x_1^2 + 2x_1 - 3 = ax_1 + b, \\ 2x_2^2 + 2x_2 - 3 = ax_2 + b. \end{cases} \tag{9}$$

Вычтем из первого уравнения системы (9) второе:

$$2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + 2(x_1 - x_2) = a(x_1 - x_2);$$

сокращая полученное равенство на ненулевое число $x_1 - x_2$, получим

$$a = 2(x_1 + x_2) + 2 = 2 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) + 2 = \frac{2}{5}.$$

Подставим найденное значение a в систему (9) и сложим уравнения друг с другом:

$$2(x_1^2 + x_2^2) + 2(x_1 + x_2) - 6 = \frac{2}{5}(x_1 + x_2) + 2b,$$

откуда

$$\begin{aligned} b &= x_1^2 + x_2^2 + \frac{4}{5}(x_1 + x_2) - 3 = \\ &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + \frac{4}{5}(x_1 + x_2) - 3 = \frac{16}{25} - 2 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) - \frac{16}{25} - 3 = -\frac{7}{5}. \end{aligned}$$

ОТВЕТ: $a = \frac{2}{5}$, $b = -\frac{7}{5}$.

ЗАДАЧА 12. («Высшая проба», 2014, 10) Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 — различные корни уравнения

$$x^4 - 2^{121}x^2 + 121 = 0,$$

идущие в порядке возрастания, т. е. $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Найдите значение выражения

$$-\frac{(11 + x_1)(11 + x_3)}{(1 + x_2)(1 + x_4)}.$$

РЕШЕНИЕ. Заменой $t = x^2$ уравнение приводится к квадратному:

$$t^2 - 2^{121}t + 121 = 0 \tag{10}$$

Дискриминант уравнения (10) положителен, поэтому оно имеет два различных корня t_1 и t_2 . Из равенств $t_1 + t_2 = 2^{121}$, $t_1t_2 = 121$ следует, что оба этих корня положительны. Пусть для определённости $t_1 < t_2$. Тогда

$$x_1 = -\sqrt{t_2}, \quad x_2 = -\sqrt{t_1}, \quad x_3 = \sqrt{t_1}, \quad x_4 = \sqrt{t_2}.$$

Заметим, что

$$x_1x_3 = x_2x_4 = -\sqrt{t_1t_2} = -11.$$

Кроме того, обозначим

$$k = \sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = x_2 + x_4 = -(x_1 + x_3).$$

Теперь имеем:

$$-\frac{(11 + x_1)(11 + x_3)}{(1 + x_2)(1 + x_4)} = -\frac{121 + 11(x_1 + x_3) + x_1x_3}{1 + x_2 + x_4 + x_2x_4} = -\frac{121 - 11k - 11}{1 + k - 11} = \frac{11k - 110}{k - 10} = 11.$$

ОТВЕТ: 11.

6 Разложение квадратного трёхчлена на множители

Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ называются также *корнями квадратного трёхчлена* $ax^2 + bx + c$. Зная корни квадратного трёхчлена, можно разложить его на множители.

ТЕОРЕМА. Пусть x_1 и x_2 — корни квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$. Тогда имеет место разложение на множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2). \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем формулу (11) «справа налево» — раскроем в правой части скобки и применим теорему Виета:

$$a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2) = a\left(x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a}\right) = ax^2 + bx + c,$$

что и требовалось.

ЗАДАЧА 13. Разложить на множители квадратный трёхчлен $2x^2 + 3x - 2$.

РЕШЕНИЕ. Находим корни уравнения $2x^2 + 3x - 2 = 0$: $x_1 = -2$ и $x_2 = 1/2$. По формуле (11) имеем:

$$2x^2 + 3x - 2 = 2(x + 2)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (x + 2)(2x - 1).$$

7 Задачи

1. Решите квадратное уравнение с помощью выделения полного квадрата. Корни проверьте по формулам Виета.

а) $x^2 - 6x + 8 = 0$;

б) $x^2 + 9x + 14 = 0$;

в) $2x^2 - 7x - 15 = 0$;

г) $3x^2 - 8x - 4 = 0$.

2. Решите квадратное уравнение с помощью упрощённой формулы корней ($b = 2k$). Корни проверьте по формулам Виета.

а) $x^2 + 2x - 3 = 0$;

б) $x^2 + 6x + 2 = 0$;

в) $3x^2 - 8x + 4 = 0$;

г) $5x^2 + 4x - 1 = 0$.

3. Найдите корни уравнения подбором с помощью формул Виета.

а) $x^2 - 5x + 4 = 0$;

б) $x^2 - 7x - 8 = 0$;

в) $x^2 - 15x + 50 = 0$;

г) $x^2 + 2x - 48 = 0$.

4. Решите уравнение:

а) $x^2 - 2014x - 2015 = 0$;

б) $47x^2 - 153x + 106 = 0$;

в) $x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$;

г) $x^2 + \pi x - 6\pi^2 = 0$.

5. (Всеросс., 2020, ШЭ, 9.3) У уравнений $x^2 + 2019ax + b = 0$ и $x^2 + 2019bx + a = 0$ есть один общий корень. Чему может быть равен этот корень, если известно, что $a \neq b$?

6102
1

6. (Всеросс., 2019, ШЭ, 9.4) Разность корней квадратного уравнения с действительными коэффициентами

$$2018x^2 + ax + b = 0$$

— целое число (при этом сами корни необязательно целые). Докажите, что дискриминант этого уравнения делится на 2018^2 .

7. (Всеросс., 2016, ШЭ, 10) Даны два уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и $cx^2 + bx + a = 0$, в которых все коэффициенты ненулевые. Оказалось, что они имеют общий корень. Верно ли, что $a = c$?

8. (Всеросс., 2016, ШЭ, 11) Учительница Мария Ивановна готовит задания для урока математики. Она хочет в уравнении

$$\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} = \frac{1}{c}$$

вместо a , b и c поставить три различных натуральных числа, чтобы корни уравнения были целыми числами. Помогите ей: подберите такие числа и решите уравнение.

9. (МГУ, геологич. ф-т, 1997) Сколько решений имеет уравнение

$$\sqrt{5}(x^2 + 2) - 2x\sqrt{7} = \sqrt[4]{21}(x^2 - 2) - 2x\sqrt{3}?$$

онГО

10. (ММО, 2009, 8.3) Известно, что квадратные уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и $bx^2 + cx + a = 0$ (a , b и c — отличные от нуля числа) имеют общий корень. Найдите его.

11. (ММО, 2004, 8.1) У квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ коэффициенты p и q увеличили на единицу. Эту операцию повторили четыре раза. Приведите пример такого исходного уравнения, что у каждого из пяти полученных уравнений корни были бы целыми числами.

12. (ММО, 2004, 9.2) У квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ коэффициенты p и q увеличили на единицу. Эту операцию повторили девять раз. Могло ли оказаться, что у каждого из десяти полученных уравнений корни — целые числа?

13. (МГУ, ДВИ, 2015.2) Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2 - 7x + 5 = 0$.

6E

14. («Физтех», 2013, 9) Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - 2x - 6 = 0$. Найдите $x_1^2x_2 + x_1x_2^2$.

71-

15. Не вычисляя корней x_1 и x_2 уравнения $x^2 + 2x - 5 = 0$, найдите:

- а) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; б) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$; в) $x_1^3 + x_2^3$; г) $x_1^4 + x_2^4$; д) $|x_1 - x_2|$.

$$\boxed{9\sqrt{7}(\sqrt{49} - 1) : 88 - (9 : \frac{9}{11} - (9 : \frac{9}{2} (9$$

16. Не вычисляя корней уравнения $2x^2 - 5x - 1 = 0$, найдите (положительную) разность квадратов его корней.

$$\boxed{\frac{4}{88\sqrt{8}}$$

17. (МГУ, экономич. ф-т, 2003) Про числа x и y известно, что $x + y = 18$, $xy = 3$. Вычислите значение выражения

$$\frac{1}{x^2|x|} + \frac{1}{y^3}.$$

$$\boxed{012}$$

18. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $3x^2 - x - 7 = 0$. Составьте квадратное уравнение, корни которого равны:

- а) $x_1 + 2$ и $x_2 + 2$; б) $\frac{1}{x_1^2}$ и $\frac{1}{x_2^2}$.

$$\boxed{0 = 6 + 187 - 2^2 197 (9 : 0 = 1 + 181 - 2^2 18 (9$$

19. Коэффициенты уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ связаны соотношением $2b^2 - 9ac = 0$. Докажите, что один корень этого уравнения в два раза больше другого.

20. Пусть x_1, x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и $S_k = x_1^k + x_2^k$ ($k \geq 0$). Докажите, что при $n \geq 2$ справедлива формула

$$aS_n + bS_{n-1} + cS_{n-2} = 0.$$

21. («Физтех», 2013, 9–11) Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $2x^2 - 7x + 1 = 0$. Известно, что уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни x_1/x_2^2 и x_2/x_1^2 . Найдите p .

$$\boxed{-150,5}$$

22. («Физтех», 2019, 9) Даны квадратные трёхчлены $f_1(x) = x^2 - ax - 3$, $f_2(x) = x^2 + 2x - b$, $f_3(x) = 3x^2 + (2 - 2a)x - 6 - b$ и $f_4(x) = 3x^2 + (4 - a)x - 3 - 2b$. Пусть разности корней равны соответственно A, B, C и D . Известно, что $|C| \neq |D|$. Найдите отношение $\frac{A^2 - B^2}{C^2 - D^2}$. Значения A, B, C, D, a, b не заданы.

$$\boxed{8}$$

23. («Физтех», 2019, 9) Дана линейная функция $f(x)$. Известно, что расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2$ и $y = f(x)$ равно $\sqrt{10}$, а расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2 - 1$ и $y = f(x) + 1$ равно $\sqrt{42}$. Найдите расстояние между точками пересечения графиков функций $y = x^2 + 1$ и $y = f(x) + 2$.

9ε^Λ

24. («Физтех», 2019, 10) Даны квадратные трёхчлены $f_1(x) = x^2 - 2ax + 3$, $f_2(x) = x^2 + x + b$, $f_3(x) = 3x^2 + (1 - 4a)x + 6 + b$ и $f_4(x) = 3x^2 + (2 - 2a)x + 3 + 2b$. Пусть разности корней равны соответственно A , B , C и D . Известно, что $|A| \neq |B|$. Найдите отношение $\frac{C^2 - D^2}{A^2 - B^2}$. Значения A , B , C , D , a , b не заданы.

ε
I

25. («Физтех», 2019, 10) Дана линейная функция $f(x)$. Известно, что расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2 - 1$ и $y = f(x)$ равно $\sqrt{30}$, а расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2$ и $y = f(x) + 3$ равно $\sqrt{46}$. Найдите расстояние между точками пересечения графиков функций $y = x^2 - 1$ и $y = f(x) + 1$.

8ε^Λ

26. («Физтех», 2019, 11) Даны квадратные трёхчлены $f_1(x) = x^2 - ax + 2$, $f_2(x) = x^2 + 3x + b$, $f_3(x) = 3x^2 + (3 - 2a)x + 4 + b$ и $f_4(x) = 3x^2 + (6 - a)x + 2 + 2b$. Пусть разности их корней равны соответственно A , B , C и D , при этом $|A| \neq |B|$. Найдите отношение $\frac{C^2 - D^2}{A^2 - B^2}$. Значения A , B , C , D , a , b не заданы.

ε
I

27. («Физтех», 2019, 11) Дана линейная функция $f(x)$. Известно, что расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2 + 1$ и $y = f(x)$ равно $3\sqrt{2}$, а расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2$ и $y = f(x) - 2$ равно $\sqrt{10}$. Найдите расстояние между точками пересечения графиков функций $y = x^2$ и $y = f(x)$.

9ε^Λ

28. («Физтех», 2018, 9) Уравнение $x^2 + ax + 6 = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2 ; при этом

$$x_1 - \frac{72}{25x_2^3} = x_2 - \frac{72}{25x_1^3}.$$

Найдите все возможные значения a .

6π = ν

29. («Физтех», 2018, 9) Уравнение $x^2 + ax + 3 = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2 ; при этом

$$x_1^3 - \frac{39}{x_2} = x_2^3 - \frac{39}{x_1}.$$

Найдите все возможные значения a .

ππ = ν

30. («Физтех», 2018, 10) Уравнение $x^2 + ax + 5 = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2 ; при этом

$$x_1^2 + \frac{250}{19x_2^3} = x_2^2 + \frac{250}{19x_1^3}.$$

Найдите все возможные значения a .

01 = v

31. («Физтех», 2018, 10) Уравнение $x^2 + ax + 2 = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2 ; при этом

$$x_1^3 + \frac{14}{x_2^2} = x_2^3 + \frac{14}{x_1^2}.$$

Найдите все возможные значения a .

1 = v

32. («Физтех», 2017, 9) Известно, что одним из корней уравнения

$$x^2 - 4a^2b^2x = 4$$

является $x_1 = (a^2 + b^2)^2$. Найдите $a^4 - b^4$.

27

33. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 9) Найдите q , при котором уравнение

$$x^2 + x + q = 0$$

имеет два различных действительных корня x_1 и x_2 , удовлетворяющих соотношению

$$x_1^4 + 2x_1x_2^2 - x_2 = 19.$$

8-

34. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 9) Пусть x_1, x_2 — корни уравнения $x^2 - x - 3 = 0$. Найдите

$$(x_1^5 - 20)(3x_2^4 - 2x_2 - 35).$$

901-

35. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 9) Пусть x_1, x_2 — корни уравнения $x^2 - x - 4 = 0$. Найдите

$$(x_1^5 - 20x_1)(x_2^4 + 16).$$

9671

36. (МГУ, геологич. ф-т, 1999) Известно, что x_1, x_2 — корни уравнения

$$2x^2 + (1 - 3\sqrt{2})x - \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 0.$$

Найти значение $A = x_1 + 3x_1x_2 + x_2$ и выяснить, какое из чисел больше: A или $-1,999$.

6661- > 2- = v

37. (МГУ, филологич. ф-т, 2005) Найдите площадь круга, описанного около прямоугольного треугольника, катеты которого являются корнями уравнения $x^2 - 4x + 2 = 0$.

лэ

38. (МГУ, географич. ф-т, 2002) Найти два различных корня $x_{1,2}$ уравнения

$$x^2 - 6px + q = 0,$$

если p, x_1, x_2, q — геометрическая прогрессия.

ҫ = 2x, 2 = 1x или 6 = 2x, 2 = 1x

39. (МГУ, мехмат, 2007) Графики двух функций $f(x) = 2x^2 - 2x - 1$ и $g(x) = -5x^2 + 2x + 3$ пересекаются в двух точках. Найдите коэффициенты a и b в уравнении прямой $y = ax + b$, проходящей через те же точки.

$\frac{2}{1} = q, \frac{2}{9} = p$

40. (Турнир им. Ломоносова, 2003) Известно, что корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ — целые числа, а p и q — простые числа. Найдите p и q .

2 = b, 3 = d

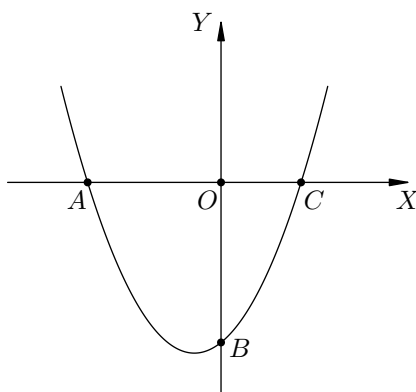
41. («Ломоносов», 2019, 9) Расстояние между корнями квадратного трёхчлена $x^2 + px + q$ равно 1. Найдите коэффициенты p и q , если известно, что они являются простыми числами.

2 = b, 3 = d

42. (Турнир им. Ломоносова, 2008) Существуют ли такие три числа, что если их поставить в одном порядке в качестве коэффициентов квадратного трёхчлена, то он имеет два положительных корня, а если в другом — два отрицательных?

Нет

43. (Всеросс., 2014, МЭ, 9) На рисунке изображён график функции $y = x^2 + ax + b$. Известно, что прямая AB перпендикулярна прямой $y = x$. Найдите длину отрезка OC .



1

44. (ММО, 2006, окружной тур, 10) Даны квадратные трёхчлены f и g с одинаковыми старшими коэффициентами. Известно, что сумма четырёх корней этих трёхчленов равна p . Найдите сумму корней трёхчлена $f + g$, если известно, что он имеет два корня.

7/d

45. («Высшая проба», 2014, 9) Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 — различные корни уравнения

$$x^4 - 2^{2013}x^2 + 49 = 0,$$

идущие в порядке возрастания, т. е. $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Найдите значение выражения

$$\frac{(7 + x_1)(7 + x_3)}{(1 + x_2)(1 + x_4)}.$$

2

46. («Высшая проба», 2014, 9) Даны два уравнения:

$$x^6 + px^3 + q = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + 5x - 10^{2013} = 0.$$

Известно, что оба корня второго уравнения являются также корнями первого. Найти последние три цифры в десятичной записи числа p . (Если p не целое, найдите три цифры перед запятой.)

125

47. (Всеросс., 2012, МЭ, 10) Прямая пересекает график функции $y = x^2$ в точках с абсциссами x_1 и x_2 , а ось абсцисс — в точке с абсциссой x_3 . Докажите, что $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_3}$.

48. (Всеросс., 2018, МЭ, 11.1) Графики функций $y = ax^2$, $y = bx$ и $y = c$ пересекаются в точке, расположенной выше оси абсцисс. Определите, сколько корней может иметь уравнение $ax^2 + bx + c = 0$.

49. (ММО, 2016, 9.3) Васе задали на дом уравнение $x^2 + p_1x + q_1 = 0$, где p_1 и q_1 — целые числа. Он нашел его корни p_2 и q_2 и написал новое уравнение $x^2 + p_2x + q_2 = 0$. Повторив операцию еще трижды, Вася заметил, что он решал четыре квадратных уравнения и каждое имело два различных целых корня (если из двух возможных уравнений два различных корня имело ровно одно, то Вася всегда выбирал его, а если оба — любое). Однако, как ни старался Вася, у него не получилось составить пятое уравнение так, чтобы оно имело два различных вещественных корня, и Вася сильно расстроился. Какое уравнение Васе задали на дом?

50. (Всеросс., 2007, финал, 8.1) Даны числа a, b, c . Докажите, что хотя бы одно из уравнений

$$x^2 + (a - b)x + (b - c) = 0, \quad x^2 + (b - c)x + (c - a) = 0, \quad x^2 + (c - a)x + (a - b) = 0$$

имеет решение.

51. (Всеросс., 2013, финал, 9.1, 10.1) Даны различные действительные числа a, b, c . Докажите, что хотя бы два из уравнений

$$(x - a)(x - b) = x - c, \quad (x - b)(x - c) = x - a, \quad (x - c)(x - a) = x - b$$

имеют решение.