Квадратичные неравенства

1. (*Разминка*) Докажите, что при любых x и y выполнено неравенство

$$\frac{x^2+y^2}{2} \geqslant xy.$$

2. (*Московская мат. регата, 2001, 8*) Укажите все пары $(x; y)$, для которых выполняется равенство

$$\left(x^4+1\right)\left(y^4+1\right) = 4x^2y^2.$$

$\boxed{(1,1),\ (-1,-1),\ (1,-1),\ (-1,1)}$

3. Докажите, что $2\left(x^2+y^2\right) \geqslant (x+y)^2$ при любых x и y.

4. (*ММО, 1963, 7.2*) Числа a, b, c таковы, что $a+b+c=0$. Доказать, что в этом случае справедливо соотношение $ab+bc+ca \leqslant 0$.

5. (*«Бельчонок», 2021, 8.5*) Числа a, b, c удовлетворяют условиям: $a+b+c=0$, $abc<0$. Докажите, что

$$\frac{a^2+b^2}{c}+\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b} > 0.$$

6. Докажите неравенство для неотрицательных значений переменных:

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^8 \geqslant 64xy(x+y)^2.$$

7. Докажите, что при любых a, b, c, d имеет место неравенство

$$(a+b+c+d)^2 \leqslant 4\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right).$$

Примечание. Это есть не что иное, как неравенство между средним арифметическим и средним квадратичным для четырех чисел:

$$\frac{a+b+c+d}{4} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}.$$

8. Докажите, что при любых a, b, c имеет место неравенство

$$\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geqslant ab - ac + 2bc.$$

9. Докажите неравенство для любых значений переменных:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geqslant a(b + c + d + e).$$

10. (*Всеросс., 1993, ОЭ, 9.1*) Докажите, что для любых действительных чисел a и b справедливо неравенство

$$a^2 + ab + b^2 \geqslant 3(a + b - 1).$$

11. (*Всеросс., 2015, РЭ, 9.7*) Числа a, b, c и d таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Докажите, что

$$(2 + a)(2 + b) \geqslant cd.$$

12. (*Турнир им. Ломоносова, 2019*) Сумма нескольких положительных чисел равна единице. Докажите, что среди них найдётся число, не меньшее суммы квадратов всех чисел.

13. (*Турнир городов, 1989, 7–8.1*) Положительные числа a, b, c таковы, что $a \geqslant b \geqslant c$ и $a + b + c \leqslant 1$. Докажите, что $a^2 + 3b^2 + 5c^2 \leqslant 1$.

14. (*Турнир городов, 1989, 9–10.1*) Положительные числа a, b, c, d таковы, что $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d$ и $a + b + c + d \geqslant 1$. Докажите, что $a^2 + 3b^2 + 5c^2 + 7d^2 \geqslant 1$.

15. (*Турнир городов, 1995, 10–11.4*) Докажите, что для любых положительных чисел $a_1, \ldots, a_n$ справедливо неравенство

$$\left(1 + \frac{a_1^2}{a_2}\right)\left(1 + \frac{a_2^2}{a_3}\right) \ldots \left(1 + \frac{a_n^2}{a_1}\right) \geqslant (1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n).$$

16. (*Всеросс., 1997, ЗЭ, 9.1*) Пусть $P(x)$ — квадратный трёхчлен с неотрицательными коэффициентами. Докажите, что для любых действительных чисел x и y справедливо неравенство

$$(P(xy))^2 \leqslant P\left(x^2\right) P\left(y^2\right).$$

17. Докажите, что при любых a, b, c имеет место неравенство

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca.$$

18. (*Турнир им. Ломоносова, 1988*) Докажите неравенство

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{1987}x_{1988} + x_{1988}x_1 \leqslant x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{1988}^2.$$

19. Докажите, что при любых a, b, c имеет место неравенство

$$(a + b + c)^2 \geqslant 3(ab + bc + ca).$$

20. Докажите, что при любых a, b, c имеет место неравенство

$$\left(\frac{a + b + c}{3}\right)^2 \leqslant \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}.$$

Примечание. Это — неравенство между средним арифметическим и средним квадратичным для трех чисел:

$$\frac{a + b + c}{3} \leqslant \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}}.$$

21. Для любых чисел a, b, c докажите неравенство

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geqslant abc(a + b + c).$$

22. (*Белорусская республиканская олимпиада, 1967, 9.4*) Доказать неравенство

$$abc^2 + bca^2 + cab^2 \leqslant a^4 + b^4 + c^4.$$

23. Докажите, что если $x + y + z = 6$, то $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 12$.

24. (*Московская мат. регата, 2013, 9*) Докажите, что если $a, b, c > 0$ и $ab + bc + ca \geqslant 12$, то $a + b + c \geqslant 6$.

25. (*Всеросс., 1996, РЭ, 10.1*) Докажите, что если a, b, c — положительные числа и

$$ab + bc + ca > a + b + c,$$

то $a + b + c > 3$.

26. (*ММО, 2002, 10.2*) Про положительные числа a, b, c известно, что

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant a + b + c.$$

Докажите, что $a + b + c \geqslant 3abc$.

27. (*Московская мат. регата, 2011, 10*) Докажите, что если $x, y, z > 0$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, то

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geqslant \sqrt{3},$$

и укажите, в каком случае достигается равенство.

28. Для любых чисел a, b, c докажите неравенство

$$(ab + bc + ca)^2 \geqslant 3abc(a + b + c).$$

29. Для неотрицательных чисел a, b, c докажите неравенство

$$ab + bc + ca \geqslant a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab}.$$

30. Докажите, что $x^2 + y^2 + 1 \geqslant xy + x + y$ при любых x и y.

31. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}}.$$

32. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geqslant a + b + c.$$

33. Докажите, что для любых чисел a, b, c, не равных нулю, выполнено неравенство

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)^2 \geqslant 3\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}\right).$$