

## Задачи с целыми числами

Иногда в обычных с виду задачах возникают нестандартные ситуации — например, уравнение с двумя неизвестными, или система из уравнения и неравенства, или система неравенств. В таких случаях решающую роль играет тот факт, что одна или несколько переменных принимают только целочисленные значения.

1. («Покори Воробьёвы горы!», 2019, 7–8.1) Сумма 8 различных натуральных чисел равна 96, причем известно, что наименьшее из этих чисел составляет не менее половины от наибольшего из них. Найдите эти числа.
2. («Покори Воробьёвы горы!», 2019, 9.1) Сумма 10 различных натуральных чисел равна 148, причем известно, что наименьшее из этих чисел составляет не менее половины от наибольшего из них. Найдите эти числа.
3. («Покори Воробьёвы горы!», 2019, 7–8.2, 9.2) Доля отличников в классе составляет менее одной трети, но более 20%, причем известно, что оно кратно 5. А доля хорошистов составляет менее 20%, но более  $\frac{2}{11}$  учащихся. Для школьников, которые не являются хорошистами и отличниками, организованы дополнительные занятия. Сколько человек должны посещать эти занятия, если известно, что в классе учится не более 20 школьников?
4. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 7–8.6, 9.5) Джеку Воробью нужно было разложить 150 пиастров по 10 кошелькам. После того как он положил некоторое количество пиастров в первый кошелек, в каждый следующий он клал больше, чем в предыдущий. В результате оказалось, что количество пиастров в первом кошельке не меньше, чем половина количества пиастров в последнем. Сколько пиастров находится в 6-м кошельке?
5. («Физтех», 2014, 7–8) 779 новогодних подарков разложены по мешкам. В некоторых мешках лежит по  $n$  подарков, в других — по 10 подарков. Какое наименьшее значение может принимать  $n$ , если всего 25 мешков?
6. («Ломоносов», 2015, 7.4, 8.1) На день рождения Андрея последней пришла Яна, подарившая ему мяч, а предпоследним — Эдуард, подаривший ему калькулятор. Испытывая калькулятор, Андрей заметил, что произведение количества всех его подарков на количество подарков, которые были у него до прихода Эдуарда, ровно на 16 больше, чем произведение его возраста на количество подарков, которые были у него до прихода Яны. Сколько подарков у Андрея?
7. («Ломоносов», 2018, 7–8.5) На клетчатой бумаге (сторона клетки 1 см) нарисован прямоугольник, стороны которого лежат на линиях сетки, причём одна сторона на 5 см меньше другой. Оказалось, что его можно разрезать по линиям сетки на несколько частей и сложить из них квадрат. Чему может быть равна сторона этого квадрата? Найдите все возможные значения.

8. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 7–8.3, 9.1) В ролевой игре «Worlds of MSU» имеются три класса: воин, маг, целитель. Каждый игрок может управлять персонажем некоторого класса (одиночный класс) или персонажем, совмещающим способности двух классов (двойной класс), например, маг-целитель. Партия из 32 игроков штурмует «Цитадель зла». Известно, что целителей (т. е. всех, имеющих способности целителей) в два раза больше магов и в  $k$  раз меньше, чем воинов ( $k$  — целое число, большее двух). Сколько игроков имеют одиночный класс, если известно, что игроков, имеющих двойной класс, на 2 больше, чем целителей?

9. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 7–8.6, 9.5) Найдите все натуральные числа, которые в 36 раз больше суммы своих цифр.

10. («Физтех», 2013, 8) Бак, полностью заполненный водой, разлили поровну в три бидона. При этом оказалось, что первый бидон заполнен водой на половину, второй — на  $2/3$ , третий — на  $3/4$ . Бак и все три бидона вмещают целое число литров. При каком наименьшем объёме бака (в литрах) возможна такая ситуация?

11. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 8) В школе учится не менее 150 мальчиков, а девочек — на 15% больше, чем мальчиков. Когда мальчики поехали на сборы, потребовалось 6 автобусов, причём в каждом автобусе ехало одинаковое количество школьников. Сколько всего человек учится в школе, если известно, что общее число учащихся не больше 400?

12. («Ломоносов», 2017, 9.1) На доске было написано 21 последовательное натуральное число. Когда одно из чисел стёрли, сумма оставшихся стала равна 2017. Какое число стёрли?

101

13. (Всеросс., 2014, МЭ, 9.1) На доске записано несколько последовательных натуральных чисел. Ровно 52% из них — чётные. Сколько чётных чисел записано на доске?

13

14. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 9.1) Число  $n + 2015$  делится на 2016, а число  $n + 2016$  делится на 2015. Найдите наименьшее натуральное  $n$ , при котором это возможно.

4058209

15. («Курчатов», 2019, 8.2) Определите все пары натуральных чисел  $n$  и  $m$ , для которых числа  $n^2 + 4m$  и  $m^2 + 5n$  являются квадратами.

16. («Курчатов», 2019, 9.1) Рыбак Вася поймал несколько рыб. Три самые большие рыбины, составляющие 35% веса всего улова, он положил в холодильник. Три самые маленькие, составляющие  $5/13$  веса всех оставшихся, рыбак отдал коту. Всю остальную пойманную рыбу Вася съел сам. Сколько рыб поймал Вася?

01

17. («Курчатов», 2015, 8.4) Ученику дано число  $x$ , записанное как обыкновенная дробь с однозначным знаменателем. Он вычислил три новых числа  $2x$ ,  $4x$  и  $5x$  (все они оказались не целыми и не полуцелыми). Каждое из трёх новых чисел ученик округлил до ближайшего целого и результаты сложил. Получилось 120. Найдите  $x$ . (Число округляется в меньшую сторону, если его дробная часть меньше  $1/2$ , и в большую, если дробная часть больше либо равна  $1/2$ .)

6  
86

18. («Курчатов», 2015, 9.3) Ученику дано число  $x$ , записанное как обыкновенная дробь с однозначным знаменателем. Он вычислил три новых числа  $5x$ ,  $7x$  и  $9x$  (все они оказались не целыми). Каждое из трёх новых чисел ученик округлил до ближайшего целого и результаты сложил. Получилось 50. Найдите  $x$ . (Число округляется в меньшую сторону, если его дробная часть меньше  $1/2$ , и в большую, если дробная часть больше либо равна  $1/2$ .)

$\frac{8}{61}$

19. («Курчатов», 2015, 10.1) Ученику дано число  $x$ : это обыкновенная дробь со знаменателем 9. Ученик вычислил три новых числа  $2x$ ,  $4x$  и  $5x$ , каждое из этих трёх чисел округлил до ближайшего целого и результаты округлений сложил. Получилось 111. Найдите  $x$ . (Число округляется в меньшую сторону, если его дробная часть меньше  $1/2$ , и в большую, если дробная часть больше либо равна  $1/2$ .)

$\frac{6}{16}$

20. («Курчатов», 2015, 11.1) Ученику дано число  $x$ : это обыкновенная дробь со знаменателем 9. Ученик вычислил три новых числа  $2x$ ,  $4x$  и  $5x$ , каждое из этих трёх чисел округлил до ближайшего целого и результаты округлений сложил. Получилось 120. Найдите  $x$ . (Число округляется в меньшую сторону, если его дробная часть меньше  $1/2$ , и в большую, если дробная часть больше либо равна  $1/2$ .)

$\frac{6}{86}$

21. (ОММО, 2014) Скуперфильд хочет выплатить наложенный на него штраф в 1000 фертингов монетами в 7 и 13 фертингов. Каким наименьшим количеством монет он может обойтись?

78

22. («Ломоносов», 2014, 10–11) Шариковая ручка стоит 10 рублей, гелевая — 40 рублей, а перьевая — 60 рублей. Какое наибольшее количество шариковых ручек можно купить при условии, что всего нужно купить ровно 15 ручек и среди них должны быть ручки всех трёх типов, а истратить на них нужно ровно 500 рублей?

9

23. («Ломоносов», 2014, 10–11) Команда спортсменов, третья часть которых — сноубордисты, спустилась с горы. При этом некоторые из них сели в вагон фуникулёра, вмещающий не более 11 человек, а все остальные спустились самостоятельно, причём их число оказалось больше 40%, но меньше 44% от общего количества. Определите количество сноубордистов (если оно определяется из условия задачи неоднозначно, то впишите в ответ сумму всех возможных его значений).

4

24. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) Три сестры пришли на рынок и продавали поштучно цыплят. Первая принесла 14 цыплят, вторая — 24, третья — 38 цыплят. Каждая из них часть товара продала утром, а часть — вечером. Утренняя цена одного цыплёнка была у всех сестёр одинаковая, и вечерняя цена тоже одинаковая, но более низкая (положительная). К вечеру весь товар был распродан, и дневная выручка (за утро и вечер) у всех сестёр оказалась одинаковой: 1200 руб. Найдите суммарную утреннюю выручку (в рублях) всех сестёр.

0861

**25.** (*ОММО, 2013.1*) Ученикам 11 «Б» класса на выбор предложили пройти тестирование ровно по одному из предметов: биологии, математике или химии. Двое ребят приняли участие в тестировании по биологии; более трети, но менее 40% учеников проходили тестирование по химии и ровно половина — по математике. Сколько ребят участвовало в тестировании по химии, если в классе присутствовали более 16 учеников?

88

**26.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11.1*) На соревнования по лёгкой атлетике ученики школы приехали на автобусе, вмещающем не более 40 человек. Каждый из них участвовал в одном из видов соревнований. При этом  $\frac{1}{7}$  часть учеников завоевали золотые медали,  $\frac{1}{4}$  часть — серебряные и ещё  $\frac{1}{4}$  — бронзовые. На обратном пути медалисты решили собрать деньги и купить по одному торту каждому из спортсменов, оставшемуся без медалей. Сколько тортов им придётся покупать?

01

**27.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11.1*) В контейнере находятся изделия нескольких типов из пяти возможных: весом 1 кг, 2 кг, 3 кг, 5 кг и 10 кг. Суммарный вес изделий в контейнере равен 100 кг. Известно, что если выбрать из контейнера по одному изделию каждого из имеющихся в нём типов, то их суммарный вес будет равен 15 кг. Количество самых тяжёлых из находящихся в контейнере изделий на 5 больше, чем количество всех остальных изделий в нём. Определите, какие типы изделий и в каком количестве находятся в контейнере.

По два изделия каждого из видов весом 2 и 3 кг, девять изделий весом 10 кг

**28.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11.1*) В школе было три урока. Но только 4 школьника были на всех уроках. Каждый из остальных «учеников» присутствовал только на двух уроках, а один из уроков прогулял. На математике в классе было 17 школьников, на физике — 18, на русском — 19. Сколько школьников присутствовало и на математике, и на физике (не имеет значения, удостоили ли они своим посещением урок русского языка)?

01

**29.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2011, 10–11.1*) Для нумерации всех парковочных мест на стоянке (подряд от первого до последнего) рядом с каждым местом был установлен его номер, составленный из табличек, на каждой из которых написано по одной цифре. В общей сложности было использовано 2148 табличек. Сколько мест на парковке? Каких цифр было использовано больше всего, а каких — меньше всего?

752 места. Больше всего использовано 1 и 2 (порядку). Меньше всего 0, 8, 9 (порядку)

**30.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2019, 10–11.1*) Все 11-классники спецшколы разделены на три отдельные категории: физики, химики и биологи. На каждых двоих биологов приходится 5 человек, считающихся физиками или химиками, а на каждых троих физиков приходится 7 человек, считающихся химиками или биологами. Найдите количество химиков, если 11-классников в школе не более 100.

29

**31.** («Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11.1) Пятая часть персонала фирмы работает в транспортном отделе, ещё 52 сотрудника — в отделе продаж, остальные — в нескольких цехах, в каждом из которых работает  $1/7$  персонала фирмы. Чему равна общая численность персонала?

141

**32.** («Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11.1) Лаборатория Альфа на покупку пяти микроскопов, четырёх телескопов и эпидиаскопа потратила 140 тыс. руб. Лаборатория Бета на покупку шести микроскопов, пяти телескопов и эпидиаскопа потратила 167 тыс. руб. Сколько потратит лаборатория Гамма на покупку трёх микроскопов, двух телескопов и эпидиаскопа, если известно, что цены у всех поставщиков одинаковы?

86 тыс. руб.

**33.** («Покори Воробьёвы горы!», 2011, 10–11.1) Второй член арифметической прогрессии, состоящей из целых чисел, равен 2, а сумма квадратов третьего и четвертого её членов меньше 4. Найдите первый член этой прогрессии.

3

**34.** («Покори Воробьёвы горы!», 2019, 10–11.1) Стороны прямоугольного треугольника выражаются натуральными числами, при этом гипотенуза на 1 длиннее одного из катетов. Может ли длина какого-то катета данного треугольника быть равна: а) 2019; б) 2018; в) 2112?

**35.** («Покори Воробьёвы горы!», 2010, 10–11.1) Петя и Вася выходят одновременно из пункта  $A$  и идут в пункт  $B$ : Петя по шоссе, а Вася по тропинке. Найти расстояние между  $A$  и  $B$  по шоссе, если путь по тропинке короче пути по шоссе на 5 км, скорость движения Васи 3 км/ч, а скорость Пети — натуральное число и он приходит в  $B$  на один час позже Васи.

8 км

**36.** (ОММО, 2010.2) В диване живут клопы и блохи. Боря лежит на диване и рассуждает: если клопов станет в несколько раз больше, то всего насекомых будет 2012, а если блох станет во столько же раз больше, а число клопов не изменится, то всего насекомых будет 2011. Сколько же насекомых живет в диване сейчас?

1311

**37.** (ОММО, 2013.2) В автомобильном пробеге Москва—Удоев—Москва участвовали несколько (одинаковых по численности) делегаций автолюбителей. Некоторые из этих делегаций заняли все места в 3-местных «Паккардах» и одном 4-местном «Лорен-Дитрихе», а остальные делегации предпочли занять все места в 5-местных «Студебеккерах» и одном 2-местном «Фиате». Сколько автолюбителей было в делегации, если «Студебеккер» в пробеге оказалось на 5 больше, чем «Паккард»?

19 или 1

**38.** («Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11.2) Число в семеричной системе счисления является трёхзначным. В системе счисления с основанием 11 оно записывается теми же тремя цифрами, но в обратном порядке. Какова его запись в десятичной системе счисления? Найдите все возможные значения.

190 или 247

39. («Покори Воробьёвы горы!», 2019, 10–11.2) Числа  $\frac{1}{17}$ ,  $\frac{1}{15}$ ,  $\frac{1}{13}$  являются членами арифметической прогрессии с возрастающими номерами. Каково наибольшее значение разности этой прогрессии?

13-15-17  
2

40. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11.2) Два брата родились в один день, но в разные годы. Оказалось, что в 2014 году каждому из них исполнилось столько лет, какова сумма цифр его года рождения. Определите год рождения каждого из братьев.

1986 и 2006

41. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11.2) Туристический автобус, вмещающий не более 50 человек, привёз группу школьников после экскурсии в кафе. Школьники расселись в кафе так, что за несколькими столами оказалось по три девочки и одному мальчику, за другими несколькими столами — по два мальчика и одной девочке, и ещё за одним столом оказались одна девочка и один мальчик. Какое максимальное количество школьников могло быть на экскурсии, если известно, что девочек в группе в полтора раза больше, чем мальчиков?

45

42. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11.2) Два мальчика в течение нескольких часов ходили кругами вокруг здания, оба по часовой стрелке, каждый с постоянной скоростью. Более быстрый проходил один круг за 5 минут, более медленный — за некоторое целое число минут. При этом время между встречами тоже равнялось некоторому целому числу минут, причём оно было не меньше 12. За какое время более медленный мальчик проходил полный круг?

За 6 минут

43. (МГУ, мехмат, 2000-05.2) Два друга, Ваня и Петя, ходили за грибами. Встретившись перед возвращением домой, они обнаружили, что Ваня нашел 35 грибов, среди которых было несколько подосиновиков, а Петя грибов не нашел. Ваня взял себе белые грибы, а остальные отдал Пете. Петя, обнаружив среди них червивый подберезовик, выкинул его. Сколько было найдено подосиновиков, если доля белых в найденных Ваней грибах оказалась равной доле подосиновиков в принесенных Петей домой грибах?

8

44. («Ломоносов», 2012, 10–11.3) В группу, состоящую из 19 детей, присланы подарки двух видов: каждый подарок первого вида содержит 5 пряников и 9 конфет, а второго — 4 пряника и 11 конфет. Объединив эти подарки, все пряники разделили между детьми поровну. Могло ли случиться при этом, что конфеты разделить поровну не удалось?

Нет

45. (ОММО, 2011.3) Одна тетрадь, 3 блокнота и 2 ручки стоят 98 рублей, а 3 тетради и блокнот — на 36 рублей дешевле 5 ручек. Сколько стоит каждый из предметов, если тетрадь стоит чётное число рублей? (Каждый из этих предметов стоит целое число рублей.)

4, 22, 14

46. («Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11.3) Вася возвёл какое-то целое число в куб и умножил результат на два. Петя возвёл другое целое число в квадрат и умножил результат на три. Оказалось, что ответы совпали. Какое число взял каждый из ребят, если эти числа отличаются не более чем на 100 (перечислите все возможные варианты)?

(6; (12; 9), (24; 96)

47. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 10–11.3) Две бригады рабочих выполнили одинаковую работу. Вторая бригада работала на полчаса больше первой. Если бы в первой бригаде было на пять человек больше, то она могла бы закончить работу на два часа раньше. Найдите число рабочих в бригадах, если производительности всех рабочих одинаковы.

25 и 24

48. («Покори Воробьёвы горы!», 2011, 10–11.4) Для детского сада закупили наборы конфет трёх разных типов, потратив 2200 рублей. Первый набор стоит 50 рублей и содержит 25 конфет. Второй набор стоит 180 рублей и содержит 95 конфет, третий набор стоит 150 рублей и содержит 80 конфет. Сколько каких наборов купили, если общее количество конфет в них максимально?

Первый набор — 2; второй набор — 11; третий набор — 8

49. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11.4) Для перевозки 60 тонн песка автомобилю потребовалось сделать некоторое количество рейсов, а для перевозки 120 тонн песка оказалось необходимо на 5 рейсов больше. На всех рейсах, кроме, может быть, последнего в каждой из этих двух перевозок, автомобиль загружается полностью. Определите все возможные значения грузоподъёмности этого автомобиля (то есть наибольшей массы груза, которую автомобиль может перевезти за один раз).

[120; 40; 80]

50. (МГУ, мехмат, 2001-07.4) Найти все трехзначные натуральные числа, каждое из которых больше суммы квадратов своих цифр на 517.

869; 959; 819

51. («Покори Воробьёвы горы!», 2010, 10–11.5) При каких значениях  $x$  число

$$\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{3-x}$$

является целым?

[1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12]

52. («Курчатов», 2014, 10.5) Пусть  $x, y, \frac{x+3}{y} + \frac{y+3}{x}$  и  $\frac{x^2+3}{y} + \frac{y^2+3}{x}$  — целые числа.

Докажите, что тогда и число  $\frac{x^3+3}{y} + \frac{y^3+3}{x}$  — целое.

53. («Курчатов», 2014, 11.5) Пусть  $x, y, \frac{x+5}{y} + \frac{y+5}{x}$  и  $\frac{x^2+5}{y} + \frac{y^2+5}{x}$  — целые числа.

Докажите, что тогда и число  $\frac{x^5+5}{y} + \frac{y^5+5}{x}$  — целое.

54. (МГУ, мехмат, 2002-05.6) Найти все значения  $x$ , для которых оба числа  $\frac{x^2+4x-1}{7x^2-6x-5}$  и  $\frac{1-x}{1+x}$  являются целыми.

$$\frac{7}{8} - \frac{6}{1} - \frac{5}{1} - 1$$