Пирамида

Задача 1. (*МГУ, ДВИ, 2012.8*) В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник ABC со сторонами $AC = BC = 5$ и $AB = 6$, боковые ребра AS, BS, CS пирамиды равны соответственно 7, 7 и 4. Прямой круговой цилиндр расположен так, что окружность его верхнего основания имеет ровно одну общую точку с каждой из боковых граней пирамиды, а окружность нижнего основания лежит в плоскости ABC и касается прямых AC и BC. Найдите высоту цилиндра.

$\boxed{\frac{5\sqrt{15}}{6}}$

Задача 2. (*МГУ, мехмат, 2002-03.4*) Основанием пирамиды служит правильный шестиугольник $ABCDEF$, а ее боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания. Расстояния от точек B и C до прямой SD равны соответственно $\sqrt{\frac{23}{14}}$ и $\sqrt{\frac{15}{14}}$. Чему равна площадь треугольника ASD? Найти отношение наименьшей из площадей треугольных сечений пирамиды, проходящих через ребро SD, к площади треугольника ASD.

$\boxed{\frac{8}{\sqrt{33}},\ \sqrt{\frac{14}{15}}}$

Задача 3. (*МГУ, мехмат, 2000-05.6*) Параллельные плоскости α и β делят тетраэдр $ABCD$ на три части так, что объем средней части меньше объемов каждой из крайней частей. Расстояния от точек A и B до плоскости α равны 15 и 10 соответственно. Расстояния от точек A и C до плоскости β равны 10 и 8 соответственно. Найти отношение площадей сечений тетраэдра плоскостями α и β, если известно, что одно из этих сечений — трапеция, а расстояние от точки D до плоскости α меньше 12.

$\boxed{\frac{134}{129}}$

Задача 4. (*МГУ, мехмат, 2000-07.6*) В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Известно, что плоскости треугольников ASC и BSD перпендикулярны друг другу. Найти площадь грани ASD, если площади граней ASB, BSA и CSD равны соответственно 5, 6 и 7.

$\boxed{\sqrt{38}}$

Задача 5. (*Моск. матем. регата, 2012, 10*) Докажите, что в правильной треугольной пирамиде двугранный угол между боковыми гранями больше, чем 60°.

Задача 6. (*Моск. матем. регата, 2012, 11*) В тетраэдре $ABCD$ плоские углы BAD и BCD — тупые. Сравните длины рёбер AC и BD.

Задача 7. (*Всеросс., 2012, РЭ, 11*) Через вершины основания четырёхугольной пирамиды $SABCD$ проведены прямые, параллельные противоположным боковым ребрам (через вершину A — параллельно SC, и так далее). Эти четыре прямые пересеклись в одной точке. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Задача 8. (*Всеросс., 2014, РЭ, 11*) Плоскость α пересекает ребра AB, BC, CD и DA треугольной пирамиды $ABCD$ в точках K, L, M и N соответственно. Оказалось, что двугранные углы $\angle(KLA, KLM)$, $\angle(LMB, LMN)$, $\angle(MNC, MNK)$ и $\angle(NKD, NKL)$ равны. (Здесь через $\angle(PQR, PQS)$ обозначается двугранный угол при ребре PQ в тетраэдре $PQRS$.) Докажите, что проекции вершин A, B, C и D на плоскость α лежат на одной окружности.

Задача 9. (*Всеросс., 2006, ОЭ, 11*) В тетраэдре $ABCD$ из вершины A опустили перпендикуляры AB', AC', AD' на плоскости, делящие двугранные углы при рёбрах CD, BD, BC пополам. Докажите, что плоскость $(B'C'D')$ параллельна плоскости (BCD).

Задача 10. (*Всеросс., 2001, ОЭ, 11*) Докажите, что если у тетраэдра два отрезка, идущие из концов некоторого ребра в центры вписанных окружностей противолежащих граней, пересекаются, то отрезки, выпущенные из концов скрещивающегося с ним ребра в центры вписанных окружностей двух других граней, также пересекаются.

Задача 11. (*Всеросс., 2012, финал, 11*) Дана пирамида $SA_1A_2\ldots A_n$, основание которой — выпуклый многоугольник $A_1A_2\ldots\ldots A_n$. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ в плоскости основания построили треугольник $X_iA_iA_{i+1}$, равный треугольнику SA_iA_{i+1} и лежащий по ту же сторону от прямой A_iA_{i+1}, что и основание (мы полагаем $A_{n+1} = A_1$). Докажите, что построенные треугольники покрывают всё основание.

Задача 12. (*Всеросс. по геометрии, 2014, 10*) Докажите, что для любого тетраэдра его самый маленький двугранный угол (из шести) не больше, чем двугранный угол правильного тетраэдра.

Задача 13. (*Всеросс. по геометрии, 2013, 10*) Общие перпендикуляры к противоположным сторонам пространственного четырёхугольника взаимно перпендикулярны. Докажите, что они пересекаются.

Задача 14. (*Всеросс. по геометрии, 2012, 10*) Дан тетраэдр $ABCD$. Точка X выбрана вне тетраэдра так, что отрезок XD пересекает грань ABC во внутренней точке. Обозначим через A', B', C' проекции точки D на плоскости XBC, XCA, XAB соответственно. Докажите, что

$$A'B' + B'C' + C'A' < DA + DB + DC.$$

Задача 15. (*Всеросс. по геометрии, 2011, 10*) Дано два тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ и $B_1B_2B_3B_4$. Рассмотрим шесть пар рёбер A_iA_j и B_kB_l, где (i, j, k, l) — перестановка чисел $(1, 2, 3, 4)$ (например, A_1A_2 и B_3B_4). Известно, что во всех парах, кроме одной, рёбра перпендикулярны. Докажите, что в оставшейся паре рёбра тоже перпендикулярны.

Задача 16. (*Всеросс. по геометрии, 2011, 10*) Три равных правильных тетраэдра имеют общий центр. Могут ли все грани многогранника, являющегося их пересечением, быть равны?

Задача 17. (*Всеросс. по геометрии, 2011, 10*) а) Найдите геометрическое место центров тяжести треугольников, вершины которых лежат на сторонах данного треугольника (по одной вершине внутри каждой стороны).

б) Найдите геометрическое место центров тяжести тетраэдров, вершины которых лежат на гранях данного тетраэдра (по одной вершине внутри каждой грани).

Задача 18. (*Всеросс. по геометрии, 2011, 10*) а) Найдите геометрическое место центров тяжести треугольников, вершины которых лежат на сторонах данного треугольника (по одной вершине внутри каждой стороны).

б) Найдите геометрическое место центров тяжести тетраэдров, вершины которых лежат на гранях данного тетраэдра (по одной вершине внутри каждой грани).

Задача 19. (*Турнир городов, 1995, 10–11*) Докажите, что из шести ребер тетраэдра можно сложить два треугольника.

Задача 20. (*Турнир городов, 1996, 10–11*) Можно ли разбить всё пространство на правильные тетраэдры и октаэдры?

Задача 21. (*Турнир городов, 1986, 9–10*) На рёбрах произвольного тетраэдра указали направления. Может ли сумма полученных таким образом шести векторов оказаться равной нулю?

Задача 22. (*Турнир городов, 2009, 10–11*) Внутри некоторого тетраэдра взяли произвольную точку X. Через каждую вершину тетраэдра провели прямую, параллельную отрезку, соединяющему X с точкой пересечения медиан противоположной грани. Докажите, что четыре полученные прямые пересекаются в одной точке.

Задача 23. (*Турнир городов, 2001, 10–11*) На поверхности правильного тетраэдра с ребром 1 см отмечены 9 точек. Докажите, что среди этих точек найдутся две, расстояние между которыми (в пространстве) не превосходит 0,5 см.

Задача 24. (*Турнир городов, 1984, 9–10*) Из вершин основания тетраэдра в боковых гранях провели высоты, а затем в каждой из боковых граней основания двух лежащих в ней высот соединили прямой. Докажите, что эти три прямые параллельны одной плоскости.

Задача 25. (*Турнир городов, 1995, 10–11*) Покажите, как разбить пространство

а) на одинаковые тетраэдры;

б) на одинаковые равногранные тетраэдры (тетраэдр называется *равногранным*, если все его грани — равные треугольники).

Задача 26. (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2006, 10–11*) Шесть отрезков таковы, что из любых трёх можно составить треугольник. Верно ли, что из этих отрезков можно составить тетраэдр?

Задача 27. (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2007, 10–11*) В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, диагонали которого перпендикулярны и пересекаются в точке P, и SP является высотой пирамиды. Докажите, что проекции точки P на боковые грани пирамиды лежат на одной окружности.

Задача 28. (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2004, 10–11*) В тетраэдре $DABC$: $\angle ACB = \angle ADB$, $(CD) \perp (ABC)$. В треугольнике ABC дана высота h, проведенная к стороне AB, и расстояние d от центра описанной окружности до этой стороны. Найдите длину CD.

$\boxed{2\sqrt{d(d-h)}}$

Задача 29. (*ММО, 2004, 10*) Существует ли тетраэдр, все грани которого — равные прямоугольные треугольники?

Задача 30. (*ММО, 2007, 11*) В основании $A_1A_2\ldots A_n$ пирамиды $SA_1A_2\ldots A_n$ лежит точка O, причём $SA_1 = SA_2 = \ldots = SA_n$ и $\angle SA_1O = \angle SA_2O = \ldots = \angle SA_nO$. При каком наименьшем значении n отсюда следует, что SO — высота пирамиды?

Задача 31. (*ММО, 2011, 11*) По рёбрам треугольной пирамиды ползают четыре жука, при этом каждый жук всё время остаётся только в одной грани (в каждой грани — свой жук). Каждый жук обходит границу своей грани в определённом направлении, причём так, что каждые два жука по общему для них ребру ползут в противоположных направлениях. Докажите, что если скорости (возможно, непостоянные) каждого из жуков всегда больше 1 см/с, то когда-нибудь какие-то два жука обязательно встретятся.

Задача 32. (*ММО, 1993, 11*) Муха летает внутри правильного тетраэдра с ребром a. Какое наименьшее расстояние она должна пролететь, чтобы побывать на каждой грани и вернуться в исходную точку?