Проектирование или векторы?

Если в стереометрической задаче нет расстояний и углов, а есть только параллельность и отношения отрезков, то могут хорошо работать два приёма.

1. *Параллельное проектирование.* Удачный выбор плоскости проектирования[1] и прямой проектирования[2] позволяет свести задачу к планиметрической. При параллельном проектировании параллельные прямые переходят в параллельные, а отношение длин отрезков, расположенных на параллельных прямых, сохраняется.

2. *Векторы.* Выбираем базис — тройку некомпланарных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (например, три ребра параллелепипеда, призмы или пирамиды). Раскладываем данные в задаче параллельные векторы по этому базису (будут фигурировать неопределённые коэффициенты, например λ и μ). Ищем эти неопределённые коэффициенты исходя из того, что если векторы
$$\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{a} + \mu_1\vec{b} + \nu_1\vec{c} \quad \text{и} \quad \vec{v}_2 = \lambda_2\vec{a} + \mu_2\vec{b} + \nu_2\vec{c}$$
параллельны, то
$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\nu_1}{\nu_2}\,.$$

Задача 1. На диагоналях A_1B и B_1C боковых граней параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ выбраны точки M и N так, что отрезок MN параллелен диагонали параллелепипеда AC_1. Найдите отношение $MN : AC_1$.

$\boxed{1:3}$

Задача 2. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точки M и N — середины боковых рёбер AA_1 и CC_1 соответственно. На отрезках CM и AB_1 расположены соответственно точки E и F так, что $EF \parallel BN$. Найдите отношение $EF : BN$.

$\boxed{1:4}$

Задача 3. В пирамиде $ABCD$ точки M, F и K — середины рёбер BC, AD и CD соответственно. На прямых AM и CF взяты соответственно точки P и Q, причём $PQ \parallel BK$. Найдите отношение $PQ : BK$.

$\boxed{2:5}$

Задача 4. На ребре AD и диагонали A_1C параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки M и N, причём прямая MN параллельна плоскости BDC_1 и $AM : AD = 1 : 5$. Найдите отношение $CN : CA_1$.

$\boxed{3:5}$

Задача 5. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на прямых AC и BA_1 взяты точки K и M так, что $KM \parallel DB_1$. Найдите отношение $KM : DB_1$.

$\boxed{1:3}$

[1] То есть плоскости, на которую производится проектирование.
[2] То есть прямой, параллельно которой производится проектирование.

Задача 6. На диагоналях AB_1 и BC_1 граней параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты точки M и N, причём отрезки MN и A_1C параллельны. Найдите отношение этих отрезков.

$\boxed{1 : 3}$

Задача 7. На диагонали AC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка M, а на прямой B_1C — точка N, причём отрезки MN и BD параллельны. Найдите отношение этих отрезков.

$\boxed{1 : 3}$

Задача 8. Через середины M и N рёбер AD и CC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость параллельно диагонали DB_1. Постройте сечение параллелепипеда этой плоскостью. В каком отношении она делит ребро BB_1?

$\boxed{1 : 5}$

Задача 9. (*«Физтех», 2024, 11.7*) Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S — вершина) со стороной основания 2 и боковым ребром 4. Точка X лежит на прямой SF, точка Y — на прямой AD, причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY.

$\boxed{\sqrt{\frac{5}{2}}}$

Задача 10. (*МФТИ, 1981*) Точка D — середина ребра A_1C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$. Правильная треугольная пирамида $SMNP$ расположена так, что плоскость её основания совпадает с плоскостью ABC, вершина M лежит на продолжении AC, причём $CM = \frac{1}{2}AC$, ребро SN проходит через точку D, а ребро SP пересекает отрезок BB_1. В каком отношении отрезок BB_1 делится точкой пересечения?

$\boxed{1 : 3}$