Произведения и факториалы

Содержание

1 Всероссийская олимпиада школьников по математике

1.1. [Vse — 2019.S.8.5] По определению $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Докажите, что выражение

$$1008! \cdot 1009! \cdot 2017! \cdot 2018!$$

не является квадратом натурального числа.

1.2. [Vse — 2017.R.9.1] В произведении трёх натуральных чисел каждый сомножитель уменьшили на 3. Могло ли произведение при этом увеличиться ровно на 2016?

1.3. [Vse — 2017.R.10.1] В произведении пяти натуральных чисел каждый сомножитель уменьшили на 3. Могло ли произведение при этом увеличиться ровно в 15 раз?

1.4. [Vse — 2017.R.11.1] В произведении семи натуральных чисел каждый сомножитель уменьшили на 3. Могло ли произведение при этом увеличиться ровно в 13 раз?

1.5. [Vse — 2008.F.9.1;10.1] Существуют ли такие 14 натуральных чисел, что при увеличении каждого из них на 1 произведение всех чисел увеличится ровно в 2008 раз?

1.6. [Vse — 2014.R.9.8] Какое из чисел больше: $(100!)!$ или $99!^{100!} \cdot 100!^{99!}$?

1.7. [Vse — 2012.F.11.8] Для натурального n обозначим $S_n = 1! + 2! + \ldots + n!$. Докажите, что при некотором n у числа S_n есть простой делитель, больший 10^{2012}.

2 Московская математическая олимпиада

2.1. [Mos — 2016.8.1;10.1] Можно ли число $1/10$ представить в виде произведения десяти положительных правильных дробей?

2.2. [Mos — 2014.8.3] Натуральные числа от 1 до 2014 как-то разбили на пары, числа в каждой из пар сложили, а полученные 1007 сумм перемножили. Мог ли результат оказаться квадратом натурального числа?

2.3. [Mos — 2008.11.2] Найдите наименьшее натуральное n, для которого число n^n не является делителем числа $2008!$.

2.4. [Mos — 2013.11.3] Сравните числа

$$\left(1+\frac{2}{3^3}\right)\left(1+\frac{2}{5^3}\right)\ldots\left(1+\frac{2}{2013^3}\right) \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{3}{2}}\,.$$

2.5. [Mos — 2009.11.5] Для каждого простого p найдите наибольшую натуральную степень числа $p!$, на которую делится число $(p^2)!$.

3 Олимпиада им. Леонарда Эйлера

3.1. [Eul — 2010.R.2] Найдите какие-нибудь семь последовательных натуральных чисел, каждое из которых можно изменить (увеличить или уменьшить) на 1 таким образом, чтобы произведение семи полученных в результате чисел равнялось произведению семи исходных чисел.

3.2. [Eul — 2011.R.6] На доске написано число 1. Если на доске написано число a, его можно заменить любым числом вида $a + d$, где d взаимно просто с a и $10 \leqslant d \leqslant 20$. Можно ли через несколько таких операций получить на доске число $18!$?

4 Турнир городов

4.1. (*Турнир городов, 2015, 8–9*) Можно ли все натуральные делители числа $100!$ (включая 1 и само число) разбить на две группы так, чтобы в обеих группах было одинаковое количество чисел и произведение чисел первой группы равнялось произведению чисел второй группы?

$\boxed{\text{Да}}$

4.2. (*Турнир городов, 2015, 10–11*) Гриша записал на доске 100 чисел. Затем он увеличил каждое число на 1 и заметил, что произведение всех 100 чисел не изменилось. Он опять увеличил каждое число на 1, и снова произведение всех чисел не изменилось, и так далее. Всего Гриша повторил эту процедуру k раз, и все k раз произведение чисел не менялось. Найдите наибольшее возможное значение k.

$\boxed{99}$