Принцип крайнего

1. (*Всеросс., 2018, МЭ, 8.2*) Записаны четыре различных натуральных числа. Оказалось, что сумма чисел, им обратных, равна 1. Может ли среди записанных чисел отсутствовать число 2?

2. (*Турнир городов, 2016, 8–9*) Из целых чисел от 1 до 100 удалили k чисел. Обязательно ли среди оставшихся чисел можно выбрать k различных чисел с суммой 100, если

а) $k = 9$;

б) $k = 8$?

а) Нет; б) да

3. (*Всеросс., 2017, МЭ, 11.6*) Каждое целое число на координатной прямой покрашено в один из двух цветов — белый или черный, причем числа 2016 и 2017 покрашены в разные цвета. Обязательно ли можно найти три одинаково покрашенных целых числа, сумма которых равна нулю?

4. (*Всеросс., 2019, финал, 9.1*) На плоскости отмечены 5 точек. Докажите, что можно выбрать некоторые из них и переместить их так, чтобы расстояние между любыми двумя перемещёнными точками не изменилось, а в результате на плоскости осталось множество из 5 точек, симметричное относительно некоторой прямой.

5. (*«Высшая проба», 2016, 9*) В гномьем клане некоторые знакомы между собой. Каждый гном владеет некоторым количеством монет. Днём каждый гном узнаёт, сколько монет у каждого из его знакомых. Вечером он отдаёт по монете каждому из знакомых, кто днём был богаче него. Гном не может отдать больше, чем у него есть (например, нищий гном ничего не отдаёт). Если у гнома днём было меньше монет, чем количество знакомых богаче, чем он, то он сам решает, кому отдавать монеты. Докажите, что начиная с какого-то дня гномы прекратят передавать друг другу монеты.

6. (*Турнир городов, 2015, 8–9*) С начала учебного года Андрей записывал свои оценки по математике. Получая очередную оценку (2, 3, 4 или 5), он называл её *неожиданной*, если до этого момента она встречалась реже каждой из всех остальных возможных оценок. (Например, если бы он получил с начала года подряд оценки 3, 4, 2, 5, 5, 5, 2, 3, 4, 3, то неожиданными были бы первая пятёрка и вторая четвёрка.) За весь учебный год Андрей получил 40 оценок — по 10 пятёрок, четвёрок, троек и двоек (неизвестно, в каком порядке). Можно ли точно сказать, сколько оценок были для него неожиданными?

Да

7. (*ММО, 2016, 11*) В английском клубе вечером собрались n его членов ($n \geqslant 3$). По традициям клуба каждый принёс с собой сок того вида, который он предпочитает, в том количестве, которое он планирует выпить в течение вечера. Согласно правилам клуба, в любой момент любые три его члена могут присесть за столик и выпить сока (каждый — своего) в любом количестве, но обязательно все трое поровну. Докажите, что для того, чтобы все члены могли в течение вечера полностью выпить принесённый с собой сок, необходимо и достаточно, чтобы доля сока, принесённого каждым членом клуба, не превосходила одной трети от общего количества.