Простые числа

Содержание

1 Всероссийская олимпиада школьников по математике

1.1. [Vse — 2006.R.8.1;9.1] Найдите какое-нибудь такое девятизначное число N, состоящее из различных цифр, что среди всех чисел, получающихся из N вычеркиванием семи цифр, было бы не более одного простого.

1.2. [Vse — 1995.R.9.5] Найдите все такие простые числа p, что число p^2+11 имеет ровно шесть различных делителей (включая единицу и само число).

1.3. [Vse — 2007.R.8.3;9.2] Существуют ли такие простые числа p_1, p_2, ..., p_{2007}, что p_1^2-1 делится на p_2, p_2^2-1 делится на p_3, ..., p_{2007}^2-1 делится на p_1?

1.4. [Vse — 2015.R.9.2] Назовём натуральное число *интересным*, если сумма его цифр — простое число. Какое наибольшее количество интересных чисел может быть среди пяти подряд идущих натуральных чисел?

1.5. [Vse — 2018.R.9.8] Серёжа выбрал два различных простых числа p и q. Он считает натуральное число n *хорошим*, если число $p+q$ можно представить в виде суммы ровно q чисел, каждое из которых имеет вид n^k при целом неотрицательном k. (Например, если бы Серёжа выбрал $p=7$ и $q=3$, то он бы счёл число $n=2$ хорошим, поскольку $7+3=2^3+2^0+2^0$.) Докажите, что Серёжа считает хорошими не более двух чисел.

1.6. [Vse — 2007.R.11.5] При каких натуральных n найдутся такие целые a, b, c, что их сумма равна нулю, а число $a^n+b^n+c^n$ — простое?

1.7. [Vse — 1993.F.9.1;11.1] Натуральное число n таково, что числа $2n+1$ и $3n+1$ являются квадратами. Может ли при этом число $5n+3$ быть простым?

1.8. [Vse — 2018.9.1] Пусть a_1, a_2, a_3, ... — бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел, а p_1, p_2, p_3, ... — последовательность простых чисел такая, что при каждом натуральном n число a_n делится на p_n. Оказалось, что при всех натуральных n и k верно равенство $a_n-a_k=p_n-p_k$. Докажите, что все числа a_1, a_2, ... простые.

1.9. [Vse — 2014.F.9.5;10.5] К натуральному числу N прибавили наибольший его делитель, меньший N, и получили степень десятки. Найдите все такие N.

1.10. [Vse — 1997.R.8.7] Найдите все такие пары простых чисел p и q, что $p^3 - q^5 = (p+q)^2$.

1.11. [Vse — 2007.F.8.7] Для натурального $n > 3$ будем обозначать через $n?$ (n-*вопросиал*) произведение всех простых чисел, меньших n. Решите уравнение $n? = 2n + 16$.

1.12. [Vse — 2018.R.10.8;11.8] Докажите, что найдётся такое натуральное число $n > 10^{2018}$, что сумма всех простых чисел, меньших n, взаимно проста с n.

1.13. [Vse — 1993.F.10.1] Длины сторон треугольника — простые числа. Докажите, что его площадь не может быть целым числом.

1.14. [Vse — 2011.R.9.7] Найдите все такие тройки простых чисел p, q, r, что четвёртая степень каждого из них, уменьшенная на 1, делится на произведение двух остальных.

1.15. [Vse — 1994.R.9.7] Найдите все такие простые числа p, q, r и s, что их сумма — простое число, а числа p^2+qs и p^2+qr — квадраты натуральных чисел. (Числа p, q, r и s предполагаются различными.)

1.16. [Vse — 2009.F.9.6] Можно ли раскрасить натуральные числа в 2009 цветов так, чтобы каждый цвет встречался бесконечное число раз и не нашлось тройки чисел, покрашенных в три различных цвета, таких, что произведение двух из них равно третьему?

1.17. [Vse — 2009.R.9.8] Для каждого натурального n обозначим через S_n сумму первых n простых чисел: $S_1 = 2$, $S_2 = 2+3 = 5$, $S_3 = 2+3+5 = 10$, … Могут ли два подряд идущих члена последовательности (S_n) оказаться квадратами натуральных чисел?

1.18. [Vse — 2008.F.11.3] Дано конечное множество простых чисел P. Докажите, что найдётся такое натуральное число x, что оно представляется в виде $x = a^p + b^p$ (с натуральными a, b) при всех $p \in P$ и не представляется в таком виде для любого простого $p \notin P$.

2 Московская математическая олимпиада

2.1. [Mos — 2013.8.1] Ваня записал несколько простых чисел, использовав ровно по одному разу все цифры от 1 до 9. Сумма этих простых чисел оказалась равной 225. Можно ли, использовав ровно по одному разу те же цифры, записать несколько простых чисел так, чтобы их сумма оказалась меньше?

2.2. [Mos — 2007.9.3] Найдите все возрастающие конечные арифметические прогрессии, которые состоят из простых чисел и у которых количество членов больше, чем разность прогрессии.

2.3. [Mos — 2013.11.2] Найдите все пары простых чисел p и q, обладающие следующим свойством: $7p+1$ делится на q, а $7q+1$ делится на p.

3 Олимпиада им. Леонарда Эйлера

3.1. [Eul — 2014.F.1] Докажите, что в разложение произведения десяти последовательных трёхзначных чисел на простые множители входит не больше 23 различных простых чисел.

3.2. [Eul — 2010.F.1] Занумеруем все простые числа в порядке возрастания: $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $\ldots$ Может ли среднее арифметическое $(p_1 + \ldots + p_n)/n$ при каком-нибудь $n \geqslant 2$ быть простым числом?

3.3. [Eul — 2012.R.4] *Собственным делителем* числа называется любой его натуральный делитель, кроме 1 и самого числа. С составным натуральным числом a разрешается проделывать следующие операции: разделить на наименьший собственный делитель или прибавить любое натуральное число, делящееся на его наибольший собственный делитель. Если число получилось простым, то с ним ничего нельзя делать. Верно ли, что с помощью таких операций из любого составного числа можно получить число 2011?

3.4. [Eul — 2014.R.8] Дано 2014 попарно различных натуральных чисел таких, что произведение любых двух из них делится на сумму этих двух чисел. Докажите, что ни одно из данных чисел не может быть равно произведению шести попарно различных простых чисел.

3.5. [Eul — 2018.R.10] Докажите, что существует натуральное число n, большее 10^{100}, такое, что сумма всех простых чисел, меньших n, взаимно проста с n.

3.6. [Eul — 2013.F.7] На доске в строчку написано n подряд идущих натуральных чисел в порядке возрастания. Под каждым из этих чисел написан его делитель, меньший этого числа и больший 1. Оказалось, что эти делители тоже образуют строчку подряд идущих натуральных чисел в порядке возрастания. Докажите, что каждое из исходных чисел больше, чем $\frac{n^k}{p_1 p_2 \ldots p_k}$, где p_1, p_2, $\ldots$, p_k — все простые числа, меньшие n.

4 «Физтех»

4.1. (*«Физтех», 2011, 10–11*) Простые числа p, q, r таковы, что $p+q+r = 118$, $pq+qr+rp = 2075$. Найдите pqr.

$\boxed{3686}$

5 «Курчатов»

5.1. (*«Курчатов», 2018, 8.3*) Найдите все пары простых чисел p и q, для которых $p^2 + pq + q^2$ является точным квадратом.

$\boxed{(3, 5) \text{ и } (5, 3)}$

5.2. (*«Курчатов», 2017, 9.4*) Найдите все пары натуральных чисел x и y, таких что отношение $\frac{xy^3}{x+y}$ является простым числом.

$\boxed{(14, 2)}$