Примеры и конструкции

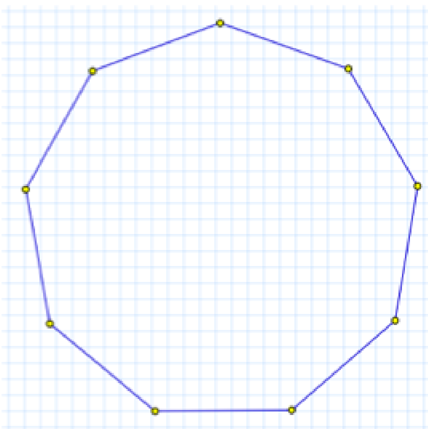
1. (*Всеросс., 2018, ШЭ, 8.1*) Представьте число 2017 в виде суммы пяти натуральных чисел так, чтобы все цифры, использованные в этих пяти числах, были различны.

2. (*«Ломоносов», 2018, 5–8.2*) Первокласник Петя выкладывал из имеющихся у него фишек контур равностороннего треугольника так, что каждая его сторона, включая вершины, содержит одинаковое число фишек. Затем из тех же фишек ему удалось таким же образом выложить контур квадрата. Сколько фишек у Пети, если сторона квадрата содержит на две фишки меньше, чем сторона треугольника?

24

3. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 5–6.2, 7–8.1*) Найдите две положительные несократимые дроби со знаменателями, не превосходящими 100, сумма которых равна $86/111$.

4. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 5–8*) В вершинах правильного 9-угольника (см. рисунок) расставьте числа 2016, 2017, …, 2024 таким образом, чтобы для любых трёх вершин, образующих правильный треугольник, одно из чисел было равно среднему арифметическому двух других.



5. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 5–9*) Можете ли вы с помощью четырёх арифметических действий (также можно использовать скобки) записать число 2016, используя последовательно цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

6. (*«Ломоносов», 2016, 5–8*) Расставьте знаки умножения и деления вместо звёздочек в выражении

$$1 * 3 * 3^2 * 3^4 * 3^8 * 3^{16} * 3^{32} * 3^{64} = 3^{99}$$

таким образом, чтобы равенство стало верным.

7. (*«Высшая проба», 2014, 7–8*) В выражение

$$(**+*)(**+*) = ****$$

вставьте цифры вместо звёздочек так, чтобы получилось верное равенство и было использовано не более четырёх различных цифр. (Число не может начинаться с нуля.)

8. (*«Высшая проба», 2016, 7–8*) В ряд выписаны цифры 987654321. Поставьте между ними ровно два знака минус так, чтобы значение полученного выражения было минимальным. (Например, при расстановке $9876 - 54 - 321$ получается 9501.)

9. (*Всеросс., 2015, ШЭ, 8*) Подберите такие не равные нулю числа n и m, чтобы равенство

$$(n \cdot 5^n)^n = m \cdot 5^9$$

было верным.

10. (*Всеросс., 2017, МЭ, 8*) Расставьте в левой части равенства

$$\frac{1}{a} \quad \frac{1}{a} \quad \frac{1}{a} \quad \frac{1}{a} \quad \frac{1}{a} \quad \frac{1}{a} = (a+1)(a-1)$$

знаки арифметических операций и скобки так, чтобы равенство стало верным для всех a, отличных от нуля.

11. (*Всеросс., 2018, МЭ, 8.3*) На координатной плоскости построены четыре прямые, уравнения которых имеют вид $y = kx+b$. Все коэффициенты и свободные члены — различные натуральные числа от 1 до 8. Могут ли эти 4 прямые разделить плоскость ровно на 8 частей?

12. (*ММО, 2014, 8*) Витя хочет найти такое выражение, состоящее из единиц, скобок, знаков «+» и «×», что

— его значение равно 10;

— если в этом выражении заменить все знаки «+» на знаки «×», а знаки «×» на знаки «+», всё равно получится 10.

Приведите пример такого выражения.

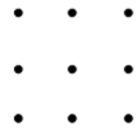
13. (*Всеросс., 2014, МЭ, 8*) В записи $*+*+*+*+*+*+*+* = **$ замените звёздочки различными цифрами так, чтобы равенство было верным.

14. (*Всеросс., 2018, ШЭ, 9.2*) Женя расставил по кругу числа от 1 до 10 в некотором порядке, а Дима в каждой промежуток между числами вписал их сумму. Могло ли так случиться, что все написанные Димой числа оказались различными?

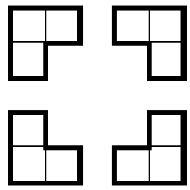
15. (*Всеросс., 2016, ШЭ, 9*) Натуральное число называется палиндромом, если оно не изменяется при записывании его цифр в обратном порядке (например, 626 — палиндром, а 2015 — нет). Представьте число 2015 в виде суммы двух палиндромов.

16. (*Всеросс., 2017, ШЭ, 9*) В равенстве $1 - 2 - 4 - 8 - 16 = 19$ поставьте несколько знаков модуля так, чтобы оно стало верным.

17. (*Всеросс., 2015, ШЭ, 9*) Отмечено 9 точек, как показано на рисунке. Нарисуйте два различных по форме семиугольника с вершинами в отмеченных точках. Для каждого семиугольника сделайте отдельный чертёж.



18. (*Всеросс., 2016, ШЭ, 10*) В таблице 3×3 записаны числа, как показано на рисунке. За ход разрешается выбрать три клетки в форме трёхклеточного уголка и уменьшить число в каждой из них на 1. Покажите, как такими операциями сделать таблицу, в которой во всех клетках стоят нули.



0	8	3
7	11	10
3	9	0

19. (*Турнир городов, 2015, 8–9*) Каждая сторона некоторого многоугольника обладает таким свойством: на прямой, содержащей эту сторону, лежит ещё хотя бы одна вершина многоугольника. Может ли число вершин этого многоугольника

а) не превосходить девяти;

б) не превосходить восьми?

20. (*Всеросс., 2016, РЭ, 9*) В классе учится 23 человека. В течение года каждый ученик этого класса один раз праздновал день рождения, на который пришли некоторые (хотя бы один, но не все) его одноклассники. Могло ли оказаться, что каждые два ученика этого класса встретились на таких празднованиях одинаковое число раз? (Считается, что на каждом празднике встретились каждые два гостя, а также именинник встретился со всеми гостями.)

21. (*Всеросс., 2018, МЭ, 10.1*) 33 богатыря выходят в дозор 33 дня. В первый день должен выйти один богатырь, во второй — два, в третий — три, и так далее, в последний день — все богатыри. Сможет ли дядька Черномор организовать дозоры так, чтобы все богатыри вышли в дозор одинаковое количество раз?

22. (*Турнир городов, 2016, 8–11*) В стране 100 городов, между каждыми двумя городами осуществляется беспосадочный перелёт. Все рейсы платные и стоят положительное (возможно, нецелое) число тугриков. Для любой пары городов А и Б перелёт из А в Б стоит столько же, сколько перелёт из Б в А. Средняя стоимость перелёта равна 1 тугрику. Путешественник хочет облететь какие-нибудь m разных городов за m перелётов, начав и закончив в своём родном городе. Всегда ли ему удастся совершить такое путешествие, потратив на билеты не более m тугриков, если

а) $m = 99$;

б) $m = 100$?

а) Нет; б) да

23. (*Турнир городов, 2016, 8–11*) Петя увидел на доске несколько различных чисел и решил составить выражение, среди значений которого все эти числа есть, а других нет. Составляя выражение, Петя может использовать какие угодно числа, особый знак «±», а также обычные знаки «+», «−», «×» и скобки. Значения составленного выражения он вычисляет, выбирая для каждого знака «±» либо «+», либо «−» во всех возможных комбинациях. Например, если на доске были числа 4 и 6, подойдёт выражение 5 ± 1, а если на доске были числа 1, 2 и 3, то подойдёт выражение $(2 \pm 0{,}5) \pm 0{,}5$. Возможно ли составить необходимое выражение, если на доске были написаны

а) числа 1, 2, 4;

б) любые 100 различных действительных чисел?

24. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013, 9*) Даны n различных составных натуральных чисел a_1, $\ldots$, a_n, принадлежащих интервалу $(1; 2013)$. Известно, что для любых двух различных чисел a_i, a_j из этого набора выполнено условие НОД$(a_i, a_j) = 1$.

а) Приведите пример такого набора для $n = 14$.

б) Докажите, что не существует такого набора, содержащего 15 чисел.

25. (*Турнир городов, 2015, 10–11*) Даны 15 целых чисел, среди которых нет одинаковых. Петя записал на доску все возможные суммы по 7 из этих чисел, а Вася — все возможные суммы по 8 из этих чисел. Могло ли случиться, что они выписали на доску одни и те же наборы чисел? (Если какое-то число повторяется несколько раз в наборе у Пети, то и у Васи оно должно повторяться столько же раз.)

26. (*«Высшая проба», 2015, 10–11*) Приведите пример функции $f(x)$, для которой выполняются все три перечисленных ниже условия:

- область определения функции $f(x)$ — множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$;
- при любом $b \in \mathbb{R}$ уравнение $f(x) = b$ имеет ровно одно решение;
- при любом $a > 0$ и любом $b \in \mathbb{R}$ уравнение $f(x) = ax + b$ имеет не менее двух решений.

27. (*«Высшая проба», 2018, 10–11*) Фонари располагаются на плоскость, освещая все точки угла южнее и западнее себя. (То есть фонарь в точке с координатами (a, b) освещает точки (x, y) с координатами $x \leqslant a$ и $y \leqslant b$.) На плоскость уже выставили 2018 синих фонарей, поместив их в различные точки. Можно ли дорасставить на плоскости 2017 красных фонарей так, что любая точка плоскости, освещённая ровно $k > 0$ синими фонарями, будет освещена ровно $k - 1$ красным фонарём? (Красные фонари можно располагать в точки, занятые другими фонарями, предполагая, что это не мешает освещению.)

28. (*ММО, 2014, 11*) В королевстве некоторые пары городов соединены железной дорогой. У короля есть полный список, в котором поименно перечислены все такие пары (каждый город имеет свое собственное имя). Оказалось, что для любой упорядоченной пары городов принц может переименовать все города так, чтобы первый город оказался названным именем второго города, а король не заметил бы изменений. Верно ли, что для любой пары городов принц может переименовать все города так, чтобы первый город оказался названным именем второго города, второй город оказался названным именем первого города, а король не заметил бы изменений?

29. (*Турнир городов, 2016, 10–11*) Арбуз имеет форму шара диаметра 20 см. Вася сделал длинным ножом три взаимно перпендикулярных плоских надреза глубиной h (надрез — это сегмент круга, h — высота сегмента, плоскости надрезов попарно перпендикулярны). Обязательно ли при этом арбуз разделится хотя бы на два куска, если

а) $h = 17$ см;

б) $h = 18$ см?

30. (*Всеросс., 2016, финал, 10*) На доске написаны четыре попарно различных целых числа, модуль каждого из которых больше миллиона. Известно, что не существует натурального числа, большего 1, на которое бы делилось каждое из четырёх написанных чисел. Петя записал в тетрадку шесть попарных сумм этих чисел, разбил эти шесть сумм на три пары и перемножил числа в каждой паре. Могли ли все три произведения оказаться равными?