Примеры и конструкции

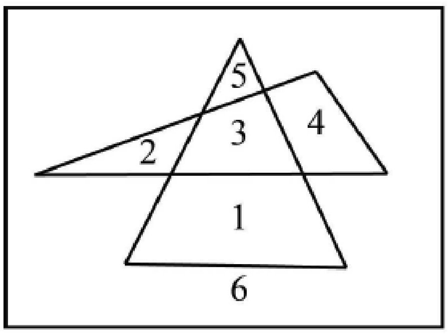
1. (*Всеросс., 2019, ШЭ, 5.1*) Впишите в квадратики числа от 1 до 5, чтобы получилось верное равенство (каждое число используется ровно один раз):

$$\square + \square = \square \cdot (\square - \square)\,.$$

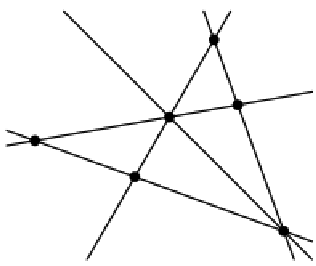
Достаточно привести один пример.

2. (*Всеросс., 2018, ШЭ, 5.2*) Девочка заменила каждую букву в своём имени её номером в русском алфавите. Получилось число 2011533. Как её зовут?

3. (*Всеросс., 2017, ШЭ, 5.3*) На рисунке два треугольника разделяют листок бумаги на 6 частей (шестая часть — это то, что останется на листе, если вырезать оба треугольника). Нарисуйте два четырёхугольника, которые разделяют лист бумаги на 9 частей. Пронумеруйте полученные части.



4. (*Всеросс., 2018, ШЭ, 6.3*) Петя нарисовал 5 прямых и заметил, что они пересекаются ровно в 6 точках. Нарисуйте 8 прямых так, чтобы они пересекались ровно в 11 точках.

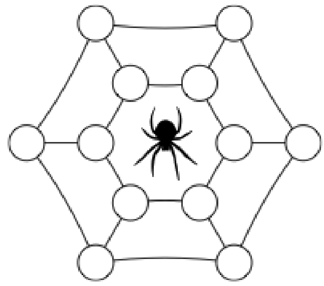


5. (*Всеросс., 2018, ШЭ, 6.4*) Приведите пример такого выражения, состоящего из единиц, скобок, знаков «+» и «×», что

— его значение равно 11;

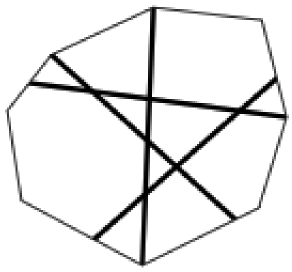
— если в этом выражении заменить все знаки «+» на знаки «×», а знаки «×» на знаки «+», то всё равно получится 11.

6. (*Математический праздник, 2018, 6.1*) Паук сплёл паутину, и во все её 12 узелков попалось по мухе или комару. При этом каждое насекомое оказалось соединено отрезком паутины ровно с двумя комарами. Нарисуйте пример, как это могло быть (написав внутри узелков буквы М и К).



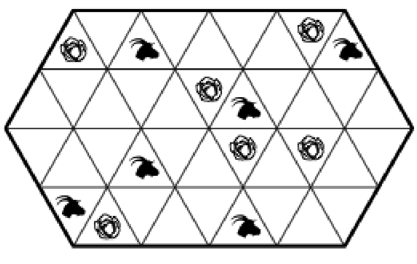
7. (*Математический праздник, 1994, 6.1*) Среди четырёх людей нет трёх с одинаковым именем, или с одинаковым отчеством, или с одинаковой фамилией, но у каждых двух совпадает или имя, или отчество, или фамилия. Может ли такое быть?

8. (*Математический праздник, 2015, 6.1*) Через двор проходят четыре пересекающиеся тропинки (см. план). Посадите четыре яблони так, чтобы по обе стороны от каждой тропинки было поровну яблонь.

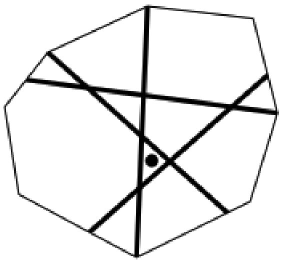


9. (*Математический праздник, 2019, 7.1*) Ньют хочет перевезти девять фантастических тварей весом 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10 кг в трех чемоданах, по три твари в каждом. Каждый чемодан должен весить меньше 20 кг. Если вес какой-нибудь твари будет делиться на вес другой твари из того же чемодана, они подерутся. Как Ньюту распределить тварей по чемоданам, чтобы никто не подрался?

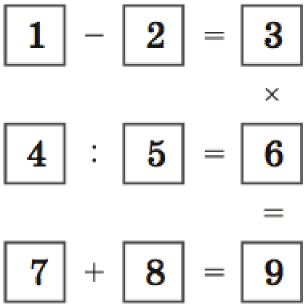
10. (*Математический праздник, 2017, 6–7.1*) Фермер огородил снаружи участок земли и разделил его на треугольники со стороной 50 м. В некоторых треугольниках он высадил капусту, а в некоторые пустил пастись коз. Помогите фермеру построить по линиям сетки дополнительные заборы как можно меньшей общей длины, чтобы защитить всю капусту от коз.



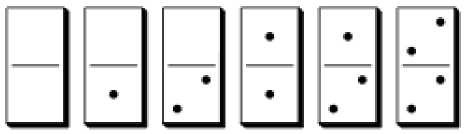
11. (*Математический праздник, 2015, 7.1*) Во дворе, где проходят четыре пересекающиеся тропинки, растет одна яблоня (см. план). Посадите ещё три яблони так, чтобы по обе стороны от каждой тропинки было поровну яблонь.



12. (*Турнир Архимеда, 2017.1*) На рисунке расставлены карточки с числами 1, 2, 3, ..., 9 так, что получились четыре неверных равенства (три горизонтальных, одно вертикальное). Переставьте эти карточки так, чтобы все равенства стали верными. Достаточно привести ответ.

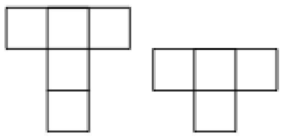


13. (*Математический праздник, 2014, 6.2*) Из шести костяшек домино (см. рисунок) сложите прямоугольник 3×4 так, чтобы во всех трёх строчках точек было поровну и во всех четырех столбцах точек было тоже поровну. (Выделите пожирнее границы доминошек.)



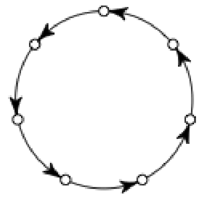
14. (*Математический праздник, 2010, 6.3*) Поросёнок Наф-Наф придумал, как сложить параллелепипед из одинаковых кубиков и оклеить его тремя квадратами без щелей и наложений. Сделайте это и вы.

15. (*Математический праздник, 2014, 6.4*) Нарисуйте фигуру, которую можно разрезать на четыре фигурки, изображённых слева, а можно — на пять фигурок, изображённых справа. (Фигурки можно поворачивать.)



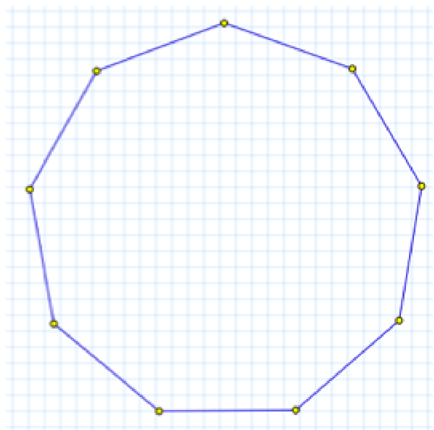
16. (*Математический праздник, 2007, 6.4*) В Совершенном городе шесть площадей. Каждая площадь соединена прямыми улицами ровно с тремя другими площадями. Никакие две улицы в городе не пересекаются. Из трёх улиц, отходящих от каждой площади, одна проходит внутри угла, образованного двумя другими. Начертите возможный план такого города.

17. (*Математический праздник, 2019, 6.4*) Семь городов соединены по кругу семью односторонними авиарейсами (см. рис.). Назначьте (нарисуйте стрелочками) еще несколько односторонних рейсов так, чтобы от любого города до любого другого можно было бы добраться, сделав не более двух пересадок. Постарайтесь сделать число дополнительных рейсов как можно меньше.

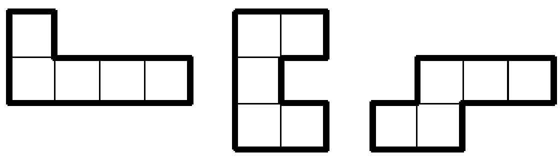


18. (*Московская устная олимпиада, 2010, 6.4*) Дан куб с ребром 2. Покажите, как наклеить на него без наложений 10 квадратов со стороной 1 так, чтобы никакие квадраты не граничили по отрезку (по стороне или её части). Перегибать квадраты нельзя.

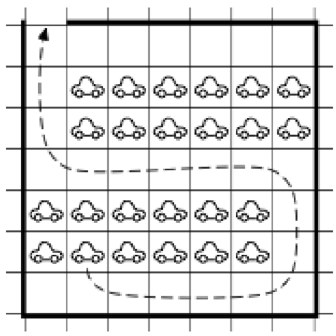
19. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 5–8.5*) В вершинах правильного 9-угольника (см. рисунок) расставьте числа 2016, 2017, …, 2024 таким образом, чтобы для любых трёх вершин, образующих правильный треугольник, одно из чисел было равно среднему арифметическому двух других.



20. (*Математический праздник, 2007, 6–7.5*) Нарисуйте, как из данных трёх фигурок, использовав каждую ровно один раз, сложить фигуру, имеющую ось симметрии.



21. (*Математический праздник, 2008, 6.5*) Автостоянка в Цветочном городе представляет собой квадрат 7×7 клеточек, в каждой из которых можно поставить машину. Стоянка обнесена забором, одна из сторон угловой клетки удалена (это ворота). Машина ездит по дорожке шириной в клетку. Незнайку попросили разместить как можно больше машин на стоянке таким образом, чтобы любая могла выехать, когда прочие стоят. Незнайка расставил 24 машины так, как показано на рисунке. Попытайтесь расставить машины по-другому, чтобы их поместилось больше.



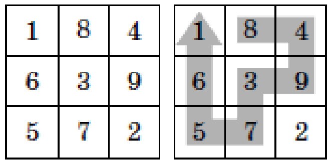
Можно поставить 28 машин. Можно ли больше — неизвестно

22. (*Математический праздник, 1998, 6.5, 7.3*) На кольцевой дороге расположены четыре бензоколонки: A, B, C и D. Расстояние между A и B — 50 км, между A и C — 40 км, между C и D — 25 км, между D и A — 35 км (все расстояния измеряются вдоль кольцевой дороги в кратчайшую сторону).

а) Приведите пример расположения бензоколонок (с указанием расстояний между ними), удовлетворяющий условию задачи.

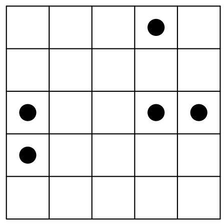
б) Найдите расстояние между B и C (укажите все возможности).

23. (*Математический праздник, 2012, 7.1*) Квадрат 3×3 заполнен цифрами так, как показано на рисунке слева. Разрешается ходить по клеткам этого квадрата, переходя из клетки в соседнюю (по стороне), но ни в какую клетку не разрешается попадать дважды.

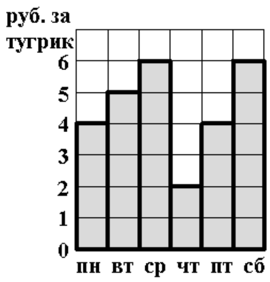


Петя прошёл, как показано на рисунке справа, и выписал по порядку все цифры, встретившиеся по пути, — получилось число 84937561. Нарисуйте другой путь так, чтобы получилось число побольше (чем больше, тем лучше).

24. (*Турнир Архимеда, 2014.1*) Требуется передвинуть каждую из пяти фишек на соседнюю клетку так, чтобы в итоге в каждой строке, каждом столбце и на каждой диагонали оказалось не более одной фишки. (*Две клетки называются соседними, если они имеют общую сторону.*) Покажите, как это сделать. (*Передвижения фишек покажите стрелками.*)

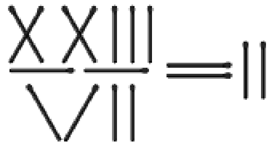


25. (*Математический праздник, 2005, 7.1*) На рисунке изображено, как изменялся курс тугрика в течение недели. У Пети было 30 рублей. В один из дней недели он обменял все свои рубли на тугрики. Потом он обменял все тугрики на рубли. Затем он ещё раз обменял все вырученные рубли на тугрики, и в конце концов, обменял все тугрики обратно на рубли. Напишите, в какие дни он совершал эти операции, если в воскресенье у него оказалось 54 рубля. (Достаточно привести пример.)



26. (*Математический праздник, 2016, 7.3*) Сложите из трёх одинаковых клетчатых фигур без оси симметрии фигуру с осью симметрии.

27. (*Всеросс., 2014, МЭ, 7.4*) Из спичек выложено неверное равенство (см. рисунок). Покажите, как переложить одну спичку, чтобы получилось равенство, в котором значения левой и правой частей различаются меньше, чем на 0,1.



28. (*Всеросс., 2019, МЭ, 7.5*) Нарисуйте шесть лучей так, чтобы они пересекались ровно в четырех точках, по три луча в каждой точке. Отметьте начала лучей жирными точками.

29. (*Математический праздник, 2006, 7.5*) Дед звал внука к себе в деревню: «Вот посмотришь, какой я необыкновенный сад посадил! У меня там растут груши и яблони, причём яблони посажены так, что на расстоянии 10 метров от каждой яблони растёт ровно две груши». — «Ну и что тут интересного, — ответил внук. — У тебя, значит, яблонь вдвое меньше, чем груш». «А вот и не угадал, — улыбнулся дед. — Яблонь у меня в саду вдвое больше, чем груш». Нарисуйте, как могли расти яблони и груши в саду у деда.

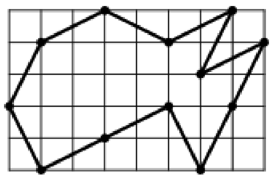
30. (*Математический праздник, 2009, 7.5*) Начертите два четырёхугольника с вершинами в узлах сетки, из которых можно сложить:

а) как треугольник, так и пятиугольник;

б) и треугольник, и четырёхугольник, и пятиугольник.

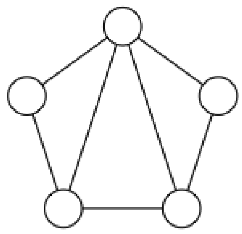
Покажите, как это можно сделать.

31. (*Математический праздник, 2014, 7.5*) Незнайка рисует замкнутые пути внутри прямоугольника 5×8, идущие по диагоналям прямоугольников 1×2. На рисунке изображен пример пути, проходящего по 12 таким диагоналям. Помогите Незнайке нарисовать путь как можно длиннее.



Самый длинный известный путь содержит 24 диагонали

32. (*Московская устная олимпиада, 2014, 7.5*) Впишите в пять кружков натуральные числа так, чтобы выполнялись два условия:



- если два кружка соединены линией, то стоящие в них числа должны отличаться ровно в два или ровно в четыре раза;
- если два кружка не соединены линией, то отношение стоящих в них чисел не должно быть равно ни 2, ни 4.

33. (*Московская устная олимпиада, 2018, 6.8*) Есть доска размером 7×12 клеток и кубик, грань которого равна клетке. Одна грань кубика окрашена невысыхающей краской. Кубик можно поставить в некоторую клетку доски и перекатывать через ребро на соседнюю грань. Ставить кубик дважды на одну и ту же клетку нельзя. Какое наибольшее количество клеток сможет посетить кубик, не испачкав доску краской?