Признаки делимости

Содержание

0.1. (*Признак делимости на 4*) Число $\overline{abc\ldots xyz}$ делится на 4 тогда и только тогда, когда число $\overline{yz}$ делится на 4. Доказать.

0.2. (*Признак делимости на 8*) Число $\overline{abc\ldots xyz}$ делится на 8 тогда и только тогда, когда число $\overline{xyz}$ делится на 8. Доказать.

0.3. (*Признак делимости на 3 и 9*) Число делится на 3 (на 9) тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3 (на 9). Доказать это: а) для трёхзначного числа $\overline{abc}$; б) для произвольного числа $\overline{a_1a_2\ldots a_n}$.

1 Всероссийская олимпиада школьников по математике

1.1. [Vse — 2017.S.11.6] Если на доске записано число A, то к нему можно прибавить любой его делитель, отличный от 1 и самого A. Можно ли из $A = 4$ получить 1234321?

1.2. [Vse — 2007.R.8.6;10.5] В натуральном числе A переставили цифры, получив число B. Известно, что $A - B = \underbrace{1\ldots1}_{n}$. Найдите наименьшее возможное значение n.

1.3. [Vse — 2005.R.8.3;9.2] Даны 19 карточек. Можно ли на каждой из карточек написать ненулевую цифру так, чтобы из этих карточек можно было сложить ровно одно 19-значное число, кратное 11?

1.4. [Vse — 2014.R.9.6] Имеются 2013 карточек, на которых написана цифра 1, и 2013 карточек, на которых написана цифра 2. Вася складывает из этих карточек 4026-значное число. За один ход Петя может поменять местами некоторые две карточки и заплатить Васе 1 рубль. Процесс заканчивается, когда у Пети получается число, делящееся на 11. Какую наибольшую сумму может заработать Вася, если Петя стремится заплатить как можно меньше?

1.5. [Vse — 1993.R.9.2;10.2] Найдите наибольшее натуральное число, из которого вычёркиванием цифр нельзя получить число, делящееся на 11.

1.6. [Vse — 1998.R.9.3] Назовем десятизначное число *интересным*, если оно делится на 11111 и все его цифры различны. Сколько существует интересных чисел?

1.7. [Vse — 1995.F.9.5] Назовём натуральные числа *похожими*, если они записываются с помощью одного и того же набора цифр (например, для набора цифр 1, 1, 2 похожими будут числа 112, 121, 211). Докажите, что существуют такие три похожих 1995-значных числа, в записи которых нет нулей, что сумма двух из них равна третьему.

1.8. [Vse — 2016.F.9.5;10.5] Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 составлены девять (не обязательно различных) девятизначных чисел; каждая из цифр использована в каждом числе ровно один раз. На какое наибольшее количество нулей может оканчиваться сумма этих девяти чисел?

1.9. [Vse — 1996.F.9.5] Докажите, что в арифметической прогрессии с первым членом, равным 1, и разностью, равной 729, найдется бесконечно много членов, являющихся степенью числа 10.

1.10. [Vse — 2002.F.11.5] Найдите наименьшее натуральное число, представимое в виде суммы 2002 натуральных слагаемых с одинаковой суммой цифр и в виде суммы 2003 натуральных слагаемых с одинаковой суммой цифр.

2 Московская математическая олимпиада

2.1. [Mos — 1993.8.1] Обозначим через $S(x)$ сумму цифр натурального числа x. Решить уравнения:
а) $x + S(x) + S(S(x)) = 1993$;
б) $x + S(x) + S(S(x)) + S(S(S(x))) = 1993$.

2.2. [Mos — 2007.9.1] Номер нынешней олимпиады (70) образован последними цифрами года её проведения, записанными в обратном порядке. Сколько ещё раз повторится такая ситуация в этом тысячелетии?

2.3. [Mos — 2015.8.3] Миша заметил, что на электронном табло, показывающем курс доллара к рублю (4 цифры, разделенные десятичной запятой), горят те же самые четыре различные цифры, что и месяц назад, но в другом порядке. При этом курс вырос ровно на 20%. Приведите пример того, как такое могло произойти.

2.4. [Mos — 2019.10.1] Приведите пример девятизначного натурального числа, которое делится на 2, если зачеркнуть вторую (слева) цифру, на 3 — если зачеркнуть в исходном числе третью цифру, ..., делится на 9, если в исходном числе зачеркнуть девятую цифру.

2.5. [Mos — 2015.11.2] В прошлом году Миша купил смартфон, который стоил целое четырёхзначное число рублей. Зайдя в магазин в этом году, он заметил, что цена смартфона выросла на 20% и при этом состоит из тех же цифр, но в обратном порядке. Какую сумму Миша потратил на смартфон?

2.6. [Mos — 1998.10.4] Существует ли натуральное число, делящееся на 1998, сумма цифр которого меньше 27?

3 Олимпиада им. Леонарда Эйлера

3.1. [Eul — 2014.F.6] Назовём натуральное число *гористым*, если в его записи есть не стоящая с краю цифра (называемая *вершиной*), которая больше всех остальных, а все остальные цифры ненулевые и сначала нестрого возрастают (то есть каждая следующая цифра больше предыдущей или равна ей) до вершины, а потом нестрого убывают (то есть каждая следующая цифра меньше предыдущей или равна ей). Например, число 12243 — гористое, а числа 3456 и 1312 — нет. Докажите, что сумма всех *стозначных* гористых чисел — составное число.

4 «Ломоносов»

4.1. (*«Ломоносов», 2011, 11*) Найдите все двузначные числа вида $\overline{xy}$, если число, имеющее шестизначную десятичную запись $\overline{64x72y}$, кратно 72.

$\boxed{80 \text{ и } 98}$

4.2. (*«Ломоносов», 2013, 7–9*) Саша и Максим (от нечего делать) написали в клетках таблицы 100×100 ненулевые цифры. После этого Саша сказал, что среди 100 чисел, образованных цифрами в каждой строке, все делятся на 9. На это Максим ответил, что среди 100 чисел, образованных цифрами в каждом столбце, ровно одно не делится на 9. Докажите, что кто-то из них ошибся.

5 «Покори Воробьёвы горы!»

5.1. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2016, 7–9*) Найдите наименьшее натуральное число N, такое, что число $99N$ состоит из одних троек.

$\boxed{3367}$

6 «Физтех»

6.1. (*«Физтех», 2015, 10–11*) Какую наименьшую сумму могут иметь девять последовательных натуральных чисел, если эта сумма оканчивается на 1234567?

$\boxed{81234567}$

6.2. (*«Физтех», 2012, 9–10*) Найдите число $\overline{ab}$, если известно, что число

$$\overline{\underbrace{2011\ldots2011}_{101\text{ раз}}a2011b\underbrace{2011\ldots2011}_{101\text{ раз}}}$$

делится на 99.

$\boxed{19}$

7 «Курчатов»

7.1. (*«Курчатов», 2014, 9–10*) Дано натуральное число, кратное 495. Между его цифрами вставили два нуля подряд. Докажите, что полученное число тоже делится на 495.