

Последовательности

Арифметическая прогрессия

1. («Физтех», 2020, 10) Дана конечная арифметическая прогрессия a_1, a_2, \dots, a_n с положительной разностью, причём сумма всех её членов равна S , а $a_1 > 0$. Известно, что если разность прогрессии увеличить в 3 раза, а её первый член оставить неизменным, то сумма S увеличится в 2 раза. А во сколько раз увеличится S , если разность исходной прогрессии увеличить в 4 раза (оставив первый член неизменным)?

Увеличится в $\frac{5}{2}$ раз

2. (ОММО, 2015, 9–11) Сумма первых тринадцати членов некоторой арифметической прогрессии составляет 50% от суммы последних тринадцати членов этой прогрессии. Сумма всех членов этой прогрессии без первых трёх членов относится к сумме всех членов без последних трёх как 5 : 4. Найдите количество членов этой прогрессии.

22

3. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11) Две арифметические прогрессии содержат по 2015 членов каждая. Отношение последнего члена первой прогрессии к первому члену второй равно отношению последнего члена второй прогрессии к первому члену первой и равно 4. Отношение суммы всех членов первой прогрессии к сумме всех членов второй равно 2. Найдите отношение разностей этих прогрессий и приведите пример таких прогрессий.

26

4. («Покори Воробьёвы горы!», 2013, 10–11) Несколько чисел образуют арифметическую прогрессию, причём их сумма равна 63, а первый член в полтора раза больше разности прогрессии. Если все члены прогрессии уменьшить на одну и ту же величину так, чтобы первый член прогрессии был равен разности прогрессии, то сумма всех чисел уменьшится не более, чем на 8, но не менее, чем на 7. Определите, какой может быть разность этой прогрессии.

или 21/8

5. («Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11) Найдите сумму общих членов прогрессий 12, 15, 18, ... и 1, 3, 9, ..., если в каждой из них 100 членов.

153

6. («Ломоносов», 2012, 10–11) Найдите первый член арифметической прогрессии a_1, a_2, \dots , если $a_{13} = 0$, а произведение чисел $5^{a_1}, 5^{a_2}, \dots, 5^{a_{24}}$ равно их среднему арифметическому.

0

7. (МГУ, мехмат, 2003-03.1) Найти первый член целочисленной арифметической прогрессии, у которой сумма первых шести членов отличается от суммы следующих шести членов менее чем на 450, а сумма первых пяти членов превышает более чем на 5 сумму любого другого набора различных членов этой прогрессии.

54

8. (МГУ, мехмат, 2000-03.2) О первых семи членах убывающей арифметической прогрессии известно, что сумма пятых степеней всех этих членов равна нулю, а сумма их четвертых степеней равна 51. Найти седьмой член этой прогрессии.

$\frac{961}{19}$

9. (МГУ, мехмат, 2002-03.3) Сумма первых четырнадцати членов арифметической прогрессии равна 77. Известно, что ее первый и одиннадцатый члены — натуральные числа. Чему равен восемнадцатый член прогрессии?

9

10. (МГУ, мехмат, 2004-03.3) Найдите все возможные значения суммы убывающей арифметической прогрессии

$$a_1 = \frac{6m - m^2 - 9}{6m - m^2}; \quad a_2 = \frac{6m - m^2 - 12}{6m - m^2}; \quad \dots; \quad a_n = \frac{-10}{6m - m^2},$$

где m — некоторое целое число.

$\frac{7}{11} - \frac{5}{12}$

11. (Всеросс., 2015, ШЭ, 11) Числа $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{a+c}$, $\frac{1}{b+c}$ образуют арифметическую прогрессию. Верно ли, что числа a^2 , b^2 , c^2 также образуют арифметическую прогрессию?

12. (Всеросс., 2018, ШЭ, 11.3) Дана арифметическая прогрессия. Сумма первых её 10 членов равна 60, а сумма первых 20 её членов равна 320. Чему может быть равен 15-й член этой прогрессии?

25

Геометрическая прогрессия

13. («Физтех», 2020, 10) Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т. е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т. е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?

увеличится в $\frac{8}{11}$ раз

14. (МГУ, мехмат, 1999-05.2) Сумма членов конечной геометрической прогрессии с первым членом 1 и положительным знаменателем равна $\frac{40}{27}$, а сумма тех же членов с чередующимися знаками (первый — со знаком «плюс», второй — со знаком «минус» и т. д.) равна $\frac{20}{27}$. Найти знаменатель прогрессии.

$\frac{3}{1}$

15. (МГУ, мехмат, 2003-07.3) Первый член конечной геометрической прогрессии с целочисленным знаменателем q меньше последнего, но не более чем на 17, а сумма ее членов со второго по последний не меньше 26. Найти q .

2

16. («Физтех», 2019, 10) Найдите первый член и знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если отношение суммы кубов всех её членов к сумме всех членов этой прогрессии равно $\frac{48}{7}$, а отношение суммы четвертых степеней членов к сумме квадратов членов этой прогрессии равно $\frac{144}{17}$.

$$\frac{b}{1} = b; q \neq 1$$

17. («Физтех», 2019, 10) Дана бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Сумма всех её членов с нечётными номерами на 2 больше, чем сумма всех членов с чётными номерами. А разность между суммой квадратов всех членов на нечётных местах и суммой квадратов всех членов на чётных местах равна $\frac{36}{5}$. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

$$\frac{b}{1} = b; q = 1$$

18. («Физтех», 2016, 10) Найдите все значения p , при каждом из которых числа $4p + 5$, $2p$ и $|p - 3|$ являются соответственно первым, вторым и третьим членами некоторой геометрической прогрессии.

$$\frac{8}{91}; 1$$

19. («Покори Воробьёвы горы!», 2019, 10–11) Сумма шести первых членов геометрической прогрессии, состоящей из положительных чисел, в 344 раза больше суммы трех ее первых членов. Найдите знаменатель прогрессии.

$$2$$

20. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии b_1, b_2, b_3, \dots равна 70, сумма квадратов членов этой прогрессии равна 2100. Найдите сумму новой бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой первый член равен $(-b_1)$, а знаменатель отличается от знаменателя исходной геометрической прогрессии только знаком.

$$0.8$$

21. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 10–11) Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если её второй член равен 3, а сумма первых трёх её членов равна 13.

$$\frac{7}{27}$$

22. («Покори Воробьёвы горы!», 2011, 10–11) Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если сумма её членов, взятых через один, начиная со второго, равна 2, а сумма её членов, взятых через один, начиная с третьего, равна 1.

$$9$$

23. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11) Сумма пяти первых членов геометрической прогрессии равна 93, а сумма следующих пяти членов равна 2976. Найдите сумму первых семи членов прогрессии.

$$183$$

24. («Ломоносов», 2010) Числа 24 и 2187 являются членами геометрической прогрессии. Найдите все натуральные числа, которые могут встретиться в этой прогрессии.

$$24, 108, 486, 2187$$

25. (*Турнир городов, 2016, 10–11*) Геометрическая прогрессия состоит из 37 натуральных чисел. Первый и последний члены прогрессии взаимно просты. Докажите, что 19-й член прогрессии является 18-й степенью натурального числа.

Арифметическая и геометрическая прогрессии

26. (*ОММО, 2009*) Третий, четвёртый, седьмой и последний члены непостоянной арифметической прогрессии образуют геометрическую прогрессию. Найдите число членов этой арифметической прогрессии.

91

27. (*«Высшая проба», 2016, 10–11*) Три различных положительных числа являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии. Могут ли эти же три числа оказаться тремя (не обязательно последовательными) членами геометрической прогрессии?

28. (*ММО, 2017, 11.1*) Даны две непостоянные прогрессии (a_n) и (b_n) , одна из которых арифметическая, а другая — геометрическая. Известно, что $a_1 = b_1$, $a_2 : b_2 = 2$ и $a_4 : b_4 = 8$. Чему может быть равно отношение $a_3 : b_3$?

29. (*Турнир городов, 2016, 10–11*) Дана бесконечно возрастающая арифметическая прогрессия. Первые её несколько членов сложили и сумму объявили первым членом новой последовательности, затем сложили следующие несколько членов исходной прогрессии и сумму объявили вторым членом новой последовательности, и так далее. Могла ли новая последовательность оказаться геометрической прогрессией?

Разные последовательности

30. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 9*) Аня не сказала Мише, сколько ей лет, но сообщила, что на каждый её день рождения мама бросает в копилку столько монет, сколько лет исполняется Ане. Миша оценил, что в копилке не менее 110, но не более 130 монет. Сколько же лет Ане?

15

31. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 9*) Последовательность чисел задана следующим образом: $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ и $a_{n+1} = 4(a_n - a_{n-1})$ при $n \geq 2$. Найдите наименьший положительный член последовательности, кратный 2014. В ответе укажите номер этого члена.

8001

32. (*ОММО, 2014*) В бесконечной числовой последовательности $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ не все члены равны между собой. Для всех $n \geq 2$ выполняется равенство

$$x_n = \frac{x_{n-1} + x_n + x_{n+1}}{3}.$$

Найдите отношение $\frac{x_{2012} - x_{1006}}{x_{1006} - x_{503}}$.

2

33. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) Дана бесконечная числовая последовательность a_1, a_2, \dots , о которой известно следующее: $a_1 = 20$, $a_{n+1} = a_n a_{n+2}$, $n \in \mathbb{N}$. Найдите все значения, которые может принимать a_{2014} .

02/1 или 0

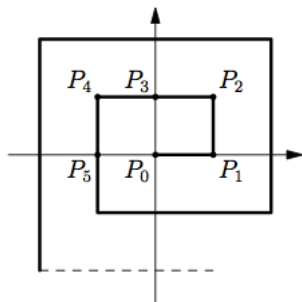
34. («Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11) Найдите все положительные значения параметра a , при которых среди чисел последовательности

$$x_n = -n^2 + 10n + 22 + \frac{10}{|5n - 31| + a}, \quad n = 1, 2, \dots$$

есть ровно два максимальных элемента.

7

35. («Курчатов», 2017, 9.1) Муравей Боря двигается по координатной плоскости, стартуя из точки $P_0 = (0, 0)$, двигаясь к точке $P_1 = (1, 0)$, и далее по спирали против часовой стрелки (рис.).



Точки с целочисленными координатами, в которые он попадает, образуют последовательность P_n . Найдите координаты точки P_{1557} .

(20, 17)

36. («Покори Воробьёвы горы!», 2019, 10–11) Аня выписала одно за другим 2018 чисел $\frac{1 \cdot 2}{2}, \frac{2 \cdot 3}{2}, \frac{3 \cdot 4}{2}, \dots, \frac{2018 \cdot 2019}{2}$ и вычислила их. Сколько их получившихся чисел имеют в десятичной записи последнюю цифру 5?

404

37. (Турнир городов, 2015, 8–9) Петя сложил 10 последовательных степеней двойки, начиная с некоторой, а Вася сложил некоторое количество последовательных натуральных чисел, начиная с 1. Могли ли они получить один и тот же результат?

17

38. (Турнир городов, 2017, 8–11) Взяли несколько положительных чисел и построили по ним такую последовательность: a_1 — сумма исходных чисел, a_2 — сумма квадратов исходных чисел, a_3 — сумма кубов исходных чисел, и т. д.

а) Могло ли случиться, что до a_5 последовательность убывает ($a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5$), а начиная с a_5 — возрастает ($a_5 < a_6 < a_7 < \dots$)?

б) А могло ли случиться наоборот: до a_5 последовательность возрастает, а начиная с a_5 — убывает?

39. (Турнир городов, 2015, 10–11) Петя сложил 100 последовательных степеней двойки, начиная с некоторой, а Вася сложил некоторое количество последовательных натуральных чисел, начиная с 1. Могли ли они получить один и тот же результат?

□

40. (Турнир городов, 2015, 8–11) Дано $2n + 1$ число (n — натуральное), среди которых одно число равно 0, два числа равны 1, два числа равны 2, ..., два числа равны n . Для каких n эти числа можно записать в одну строку так, чтобы для каждого натурального m от 1 до n между двумя числами, равными m , было расположено ровно m других чисел?

□

41. (Всеросс., 2015, РЭ, 9.8) Петя хочет выписать все возможные последовательности из 100 натуральных чисел, в каждой из которых хотя бы раз встречается тройка, а любые два соседних члена различаются не больше, чем на 1. Сколько последовательностей ему придётся выписать?

42. (Всеросс., 2014, МЭ, 10) Первый член последовательности равен 934. Каждый следующий равен сумме цифр предыдущего, умноженной на 13. Найдите 2013-й член последовательности.

□

43. (ММО, 2015, 10) По целому числу a построим последовательность

$$a_1 = a, \quad a_2 = 1 + a_1, \quad a_3 = 1 + a_1 a_2, \quad a_4 = 1 + a_1 a_2 a_3, \quad \dots$$

(каждое следующее число на 1 превосходит произведение всех предыдущих). Докажите, что разности её соседних членов ($a_{n+1} - a_n$) — квадраты целых чисел.

44. (ММО, 2015, 11) Последовательность (a_n) такова, что $a_n = n^2$ при $1 \leq n \leq 5$ и при всех натуральных n выполнено равенство $a_{n+5} + a_{n+1} = a_{n+4} + a_n$. Найдите a_{2015} .

45. (Всеросс., 2015, МЭ, 11) На экране компьютера сгенерирована некоторая конечная последовательность нулей и единиц. С ней можно производить следующую операцию: набор цифр «01» заменять на набор цифр «1000». Может ли такой процесс замен продолжаться бесконечно или когда-нибудь он обязательно прекратится?

□

46. (Всеросс., 2017, РЭ, 9.8) Изначально на стол положили 100 карточек, на каждой из которых записано по натуральному числу; при этом было ровно 43 карточки с нечётными числами. Затем каждую минуту проводилась следующая процедура. Для каждой трёх карточек, лежащих на столе, вычислялось произведение записанных на них чисел, все эти произведения складывались, и полученное число записывалось на новую карточку, которая добавлялась к лежащим на столе. Через год после начала процесса выяснилось, что на столе есть карточка с числом, кратным 2^{10000} . Докажите, что число, кратное 2^{10000} , было на одной из карточек уже через день после начала.

47. (Всеросс., 2019, РЭ, 10.7) Даны действительные числа a и b , причём $b > a > 1$. Пусть

$$x_n = 2^n \left(\sqrt[2^n]{b} - \sqrt[2^n]{a} \right).$$

Докажите, что последовательность x_1, x_2, \dots убывает.

48. (Всеросс., 2019, РЭ, 11.7) Дано положительное число $a \neq 1$. Докажите, что последовательность x_1, x_2, \dots , где

$$x_n = 2^n \left(\sqrt[2^n]{a} - 1 \right),$$

убывает.

49. (Всеросс., 2015, РЭ, 11.8) Петя хочет выписать все возможные последовательности из 100 натуральных чисел, в каждой из которых хотя бы раз встречается число 4 или 5, а любые два соседних члена различаются не больше, чем на 2. Сколько последовательностей ему придётся выписать?

50. (Всеросс., 2017, РЭ, 11.8) Изначально на стол кладут 100 карточек, на каждой из которых записано по натуральному числу; при этом среди них ровно 28 карточек с нечётными числами. Затем каждую минуту проводится следующая процедура. Для каждых 12 карточек, лежащих на столе, вычисляется произведение записанных на них чисел, все эти произведения складываются, и полученное число записывается на новую карточку, которая добавляется к лежащим на столе. Можно ли выбрать исходные 100 чисел так, что для любого натурального d на столе рано или поздно появится карточка с числом, кратным 2^d ?

51. (Всеросс., 2017, финал, 9.4) Существует ли такая бесконечная возрастающая последовательность a_1, a_2, a_3, \dots натуральных чисел, что сумма любых двух различных членов последовательности взаимно проста с суммой любых трёх различных членов последовательности?

52. (Всеросс., 2018, финал, 11.7) Определим последовательность a_1, a_2, a_3, \dots формулой

$$a_n = \left[n^{\frac{2018}{2017}} \right].$$

Докажите, что существует такое натуральное число N , что среди любых N подряд идущих членов последовательности есть такой, десятичная запись которого содержит цифру 5. (Как обычно, через $[x]$ обозначается наибольшее целое число, не превосходящее x .)