Многочлены

Содержание

1 Теорема Безу. Разложение на множители

Любой многочлен степени n можно разделить с остатком на многочлен степени $k < n$ (например, в столбик). В частном получится многочлен степени $n-k$, а в остатке — многочлен степени меньше k. В частности, если разделить произвольный многочлен на многочлен первой степени $x - a$, то в остатке получится многочлен нулевой степени, то есть *число*.

Теорема Безу. Остаток от деления многочлена $p(x)$ на $x - a$ равен $p(a)$.

1.1. Докажите теорему Безу. Выведите в качестве следствия утверждение: *число a является корнем многочлена $p(x)$ тогда и только тогда, когда $p(x)$ делится на $x - a$.*

1.2. (*ММО, 1947, 7–8*) Какой остаток даёт $x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$ при делении на $x - 1$?

1.3. При каком значении a многочлен $x^{100500} + ax^{77} + 7$ делится на $x + 1$?

$\boxed{a = 8}$

1.4. Найдите остаток от деления многочлена $x^{2018} + x + 2$ на $x^2 - 1$.

$\boxed{x + 3}$

1.5. Некоторый многочлен даёт остаток 2 при делении на $x - 1$ и остаток 1 при делении на $x - 2$. Какой остаток даёт этот многочлен при делении на $(x - 1)(x - 2)$?

$\boxed{3 - x}$

1.6. (*ММО, 1940, 7–8*) Разложить на множители: $(b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3$.

1.7. (*Моск. матем. регата, 2015, 11*) В равенстве $x^5 + 2x + 3 = p^k$ числа x и k — натуральные. Может ли число p быть простым?

1.8. (*Турнир городов, 2007, 10–11*) Многочлен $x^3 + px^2 + qx + r$ имеет на интервале $(0; 2)$ три корня. Докажите, что $-2 < p + q + r < 0$.

1.9. (*Моск. матем. регата, 2017, 11*) Дан многочлен $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$. Известно, что каждое из уравнений $f(x) = 1$ и $f(x) = 2$ имеет четыре корня. Докажите, что если для корней первого уравнения выполняется равенство $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$, то и для корней второго уравнения выполняется аналогичное равенство.

1.10. (*«Курчатов», 2018, 10*) Квадратные трехчлены $P(x) = x^2 + \frac{x}{2} + b$ и $Q(x) = x^2 + cx + d$ с вещественными коэффициентами таковы, что $P(x)Q(x) = Q(P(x))$ для всех x. Найдите все вещественные корни уравнения $P(Q(x)) = 0$.

$\boxed{-1;\ \frac{1}{2}}$

1.11. (*ММО, 1998, 11.1*) Числа x, y, z удовлетворяют равенству

$$x + y + z - 2(xy + yz + xz) + 4xyz = \frac{1}{2}.$$

Докажите, что хотя бы одно из них равно $1/2$.

1.12. (*Всеросс., 2001, финал, 9.2*) Два многочлена

$$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \text{и} \quad Q(x) = x^2 + px + q$$

принимают отрицательные значения на некотором интервале I длины более 2, а вне I — неотрицательны. Докажите, что найдётся такая точка x_0, что $P(x_0) < Q(x_0)$.

1.13. (*Всеросс., 2001, финал, 10.5*) Многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет три различных действительных корня, а многочлен $P(Q(x))$, где $Q(x) = x^2 + x + 2001$, действительных корней не имеет. Докажите, что $P(2001) > 1/64$.

1.14. (*ММО, 2018, 11.3*) Существуют ли такое натуральное n и такой многочлен $P(x)$ степени n, имеющий n различных действительных корней, что при всех действительных x выполнено равенство

а) $P(x)P(x+1) = P(x^2)$;

б) $P(x)P(x+1) = P(x^2+1)$?

2 Многочлены с целыми коэффициентами

2.1. (*ММО, 1941, 9–10*) Доказать, что многочлен с целыми коэффициентами

$$a_0x^n + a_1x_{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

принимающий при $x = 0$ и $x = 1$ нечётные значения, не имеет целых корней.

2.2. (*Всеросс., 2002, ОЭ, 9.2*) Приведённый квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами в трёх последовательных целых точках принимает простые значения. Докажите, что он принимает простое значение по крайней мере ещё в одной целой точке.

2.3. (*Турнир городов, 1993, 8–9*) Можно ли подобрать два многочлена $P(x)$ и $Q(x)$ с целыми коэффициентами так, что $P - Q$, P и $P + Q$ — квадраты некоторых многочленов (причём Q не получается умножением P на число)?

2.4. (*ММО, 1996, 11.2*) Найдите какой-нибудь многочлен с целыми коэффициентами, корнем которого является число $\sqrt[5]{2+\sqrt{3}} + \sqrt[5]{2-\sqrt{3}}$.

Теорема о рациональном корне. Если многочлен с целыми коэффициентами

$$a_0x^n + a_1x_{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

имеет рациональный корень p/q (дробь несократима), то старший коэффициент a_0 делится на q, а свободный член a_n делится на p.

2.5. Докажите эту теорему. Выведите отсюда, что $\sqrt{13}$ — иррациональное число.

2.6. (*Турнир городов, 1998, 8–9*) Незнайка решал уравнение, в левой части которого стоял многочлен третьей степени с целыми коэффициентами, а в правой — 0. Он нашёл корень $1/7$. Знайка, заглянув к нему в тетрадь, увидел только первые два слагаемых многочлена: $19x^3+98x^2$ и сразу сказал, что ответ неверен. Обоснуйте ответ Знайки.

2.7. (*Турнир городов, 1996, 10–11*) Дано n чисел, p — их произведение. Разность между p и каждым из этих чисел — нечётное число. Докажите, что все данные n чисел иррациональны.

2.8. (*ММО, 1995, 10.5*) Целые числа a, b и c таковы, что числа $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$ и $\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}$ тоже целые. Докажите, что $|a| = |b| = |c|$.

Целочисленная теорема Безу. Пусть $p(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Тогда для любых различных целых чисел a и b число $p(a) - p(b)$ делится на $a - b$.

2.9. Докажите это утверждение.

2.10. Существует ли многочлен $p(x)$ с целыми коэффициентами, такой, что $p(3) = 7$ и $p(8) = 20$?

2.11. Дан многочлен с целыми коэффициентами. Если в него вместо неизвестного подставить 2 или 3, то получаются числа, кратные 6. Докажите, что если вместо неизвестного в него подставить 5, то также получится число, кратное 6.

2.12. (*Турнир городов, 1987, 9–10*) $p(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Известно, что для некоторых целых a и b выполняется равенство $p(a) - p(b) = 1$. Докажите, что a и b различаются на 1.

2.13. (*Турнир им. Ломоносова, 2001*) Все коэффициенты многочлена $P(x)$ — целые числа. Известно, что $P(1) = 1$ и что $P(n) = 0$ при некотором натуральном n. Найдите n.

$\boxed{n = 2}$

2.14. (*Моск. матем. регата, 2013, 10*) Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Известно, что $P(1) = 2013$, $P(2013) = 1$, $P(k) = k$, где k — некоторое целое число. Найдите k.

$\boxed{k = 1007}$

2.15. (*Моск. матем. регата, 2016, 11*) У многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ один и тот же набор целых коэффициентов (их порядок различен). Докажите, что разность $P(2015)-Q(2015)$ кратна 1007.

2.16. (*Задачник «Кванта», 1970, №4, М16*) Докажите, что многочлен $p(x)$ с целыми коэффициентами, который при трёх различных целых значениях x принимает значение 1, не может иметь ни одного целого корня.

2.17. (*ММО, 1973, 9.3*) Дан многочлен с целыми коэффициентами. В трёх целых точках он принимает значение 2. Доказать, что ни в какой целой точке он не принимает значение 3.

2.18. (*ММО, 1973, 10.3*) Многочлен $p(x)$ с целыми коэффициентами при некоторых целых x принимает значения 1, 2 и 3. Доказать, что существует не более одного целого x, при котором значение этого многочлена равно 5.

2.19. (*ММО, 1955, 10.1*) Доказать, что если p/q — несократимая рациональная дробь, являющаяся корнем полинома $f(x)$ с целыми коэффициентами, то $p - kq$ есть делитель числа $f(k)$ при любом целом k.

2.20. (*ММО, 2005, 10.2*) На графике многочлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целыми координатами. Докажите, что если расстояние между ними — целое число, то соединяющий их отрезок параллелен оси абсцисс.

2.21. (*ММО, 2008, 10.4*) Докажите, что если некоторый многочлен с целыми коэффициентами принимает в k целых точках значения среди чисел от 1 до $k-1$, то при $k \geqslant 6$ эти значения равны.

2.22. (*Турнир городов, 2014, 10–11*) Дан многочлен двадцатой степени с целыми коэффициентами. На плоскости отметили все точки с целыми координатами, у которых ординаты не меньше 0 и не больше 10. Какое наибольшее число отмеченных точек может лежать на графике этого многочлена?

2.23. (*Всеросс., 2005, ОЭ, 11.5*) Докажите, что для любого многочлена P с целыми коэффициентами и любого натурального k существует такое натуральное n, что $P(1) + P(2) + \ldots + P(n)$ делится на k.

2.24. (*Всеросс., 2017, РЭ, 10.4, 11.3*) Учитель собирается дать детям задачу следующего вида. Он сообщит им, что он задумал многочлен $P(x)$ степени 2017 с целыми коэффициентами, старший коэффициент которого равен 1. Затем он сообщит им k целых чисел n_1, n_2, $\ldots$, n_k и отдельно сообщит значение выражения $P(n_1)P(n_2)\ldots P(n_k)$. По этим данным дети должны найти многочлен, который мог бы задумать учитель. При каком наименьшем k учитель сможет составить задачу такого вида так, чтобы многочлен, найденный детьми, обязательно совпал бы с задуманным?

2.25. (*ММО, 1977, 9.5, 10.5*) Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, причём для каждого натурального x выполняется неравенство $P(x) > x$. Определим последовательность $\{b_n\}$ следующим образом: $b_1 = 1$, $b_{k+1} = P(b_k)$ для $k \geqslant 1$. Известно, что для любого натурального d найдётся член последовательности $\{b_n\}$, делящийся на d. Докажите, что $P(x) = x + 1$.

2.26. (*ММО, 1996, 10.6*) Докажите, что для любого многочлена $P(x)$ степени n с натуральными коэффициентами найдётся такое целое число k, что числа $P(k)$, $P(k+1)$, $\ldots$, $P(k+1996)$ будут составными, если

а) $n = 1$;

б) n — произвольное натуральное число.

2.27. (*Всеросс., 2016, финал, 11.5*) Пусть n — натуральное число. На $2n+1$ карточках написано по ненулевому целому числу; сумма всех чисел также ненулевая. Требуется этими карточками заменить звёздочки в выражении $*x^{2n}+*x^{2n-1}+\ldots+*x+*$ так, чтобы полученный многочлен не имел целых корней. Обязательно ли это можно сделать?

2.28. (*Турнир городов, 2010, 10–11*) Барон Мюнхгаузен попросил задумать непостоянный многочлен $P(x)$ с целыми неотрицательными коэффициентами и сообщить ему только значения $P(2)$ и $P(P(2))$. Барон утверждает, что он только по этим данным всегда может восстановить задуманный многочлен. Не ошибается ли барон?

2.29. (*ММО, 2001, 11.4*) Докажите, что не существует многочлена степени не ниже двух с целыми неотрицательными коэффициентами, значение которого при любом простом p является простым числом.

2.30. (*Всеросс., 1994, ОЭ, 10.6*) Найдите свободный член многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, если известно, что он по модулю меньше тысячи, и $P(19)=P(94)=1994$.

208

2.31. (*ММО, 2015, 9.6, 10.6*) Существуют ли два многочлена с целыми коэффициентами такие, что у каждого из них есть коэффициент, модуль которого больше 2015, но у произведения этих двух многочленов модули всех коэффициентов не превосходят 1?

2.32. (*Всеросс., 2019, финал, 10.8, 11.7*) Даны непостоянный многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами и натуральное число n. Положим $a_0=n$, $a_k=P(a_{k-1})$ при всех натуральных k. Оказалось, что для любого натурального b в последовательности a_0, a_1, a_2, $\ldots$ есть число, являющееся b-й степенью натурального числа, большего 1. Докажите, что многочлен $P(x)$ — линейный.

2.33. (*Всеросс., 1999, ОЭ, 11.8*) Для некоторого многочлена существует бесконечное множество его значений, каждое из которых многочлен принимает по крайней мере в двух целочисленных точках. Докажите, что существует не более одного значения, которое многочлен принимает ровно в одной целой точке.

2.34. (*Всеросс., 2003, финал, 11.3*) Даны многочлены $f(x)$ и $g(x)$ с целыми неотрицательными коэффициентами, m — наибольший коэффициент многочлена f. Известно, что для некоторых натуральных чисел $a<b$ имеют место равенства $f(a)=g(a)$ и $f(b)=g(b)$. Докажите, что если $b>m$, то многочлены f и g совпадают.

3 Многочлены нечётной степени

Любой многочлен нечётной степени имеет действительный корень. Почему?

3.1. (*ММО, 1989, 10.2*) Существует ли функция, график которой на координатной плоскости имеет общую точку с любой прямой?

3.2. (*Всеросс., 2013, финал, 11.1*) Даны многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ десятой степени, старшие коэффициенты которых равны 1. Известно, что уравнение $P(x)=Q(x)$ не имеет действительных корней. Докажите, что уравнение $P(x+1)=Q(x-1)$ имеет хотя бы один действительный корень.

3.3. (*Всеросс., 2002, ОЭ, 11.5*) Пусть $P(x)$ — многочлен нечётной степени. Докажите, что уравнение $P(P(x)) = 0$ имеет не меньше различных действительных корней, чем уравнение $P(x) = 0$.

3.4. (*Всеросс., 2003, ОЭ, 11.5*) Квадратные трехчлены $P(x) = x^2 + ax + b$ и $Q(x) = x^2 + cx + d$ таковы, что уравнение $P(Q(x)) = Q(P(x))$ не имеет действительных корней. Докажите, что $b \neq d$.

3.5. (*Всеросс., 2012, финал, 11.5*) Даны многочлен $P(x)$ и такие числа a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, что $a_1a_2a_3 \neq 0$. Оказалось, что

$$P(a_1x + b_1) + P(a_2x + b_2) = P(a_3x + b_3)$$

для любого действительного x. Докажите, что $P(x)$ имеет хотя бы один действительный корень.

3.6. (*Всеросс., 2004, ОЭ, 11.3*) Пусть многочлен $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ имеет хотя бы один действительный корень и $a_0 \neq 0$. Докажите, что, последовательно вычёркивая в некотором порядке одночлены в записи $P(x)$, можно получить из него число a_0 так, чтобы каждый промежуточный многочлен также имел хотя бы один действительный корень.

4 Многочлен n-й степени имеет не более n корней

4.1. Докажите, что многочлен степени n имеет не более чем n корней.

4.2. (*Всеросс., 2011, финал, 11.5*) Даны два различных приведённых кубических многочлена $F(x)$ и $G(x)$. Выписали все корни уравнений $F(x) = 0$, $G(x) = 0$, $F(x) = G(x)$. Оказалось, что выписаны 8 различных чисел. Докажите, что наибольшее и наименьшее из них не могут одновременно являться корнями многочлена $F(x)$.

4.3. (*Всеросс., 2013, финал, 11.6*) Петя и Вася придумали десять многочленов пятой степени. Затем Вася по очереди называл последовательные натуральные числа (начиная с некоторого), а Петя каждое названное число подставлял в один из многочленов по своему выбору и записывал полученные значения на доску слева направо. Оказалось, что числа, записанные на доске, образуют арифметическую прогрессию (именно в этом порядке). Какое максимальное количество чисел Вася мог назвать?

4.4. (*Всеросс., 1995, финал, 9.3*) Известно, что $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ — квадратные трёхчлены. Может ли уравнение $f(g(h(x))) = 0$ иметь корни 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8?

4.5. (*Всеросс., 2016, финал, 10.3*) Дан кубический многочлен $f(x)$. Назовём *циклом* тройку различных чисел (a, b, c) таких, что $f(a) = b$, $f(b) = c$ и $f(c) = a$. Известно, что нашлись восемь циклов (a_i, b_i, c_i), $i = 1, 2, \ldots, 8$, в которых участвуют 24 различных числа. Докажите, что среди восьми чисел вида $a_i + b_i + c_i$ есть хотя бы три различных.

4.6. (*Турнир городов, 2015, 10–11*) Гриша записал на доске 100 чисел. Затем он увеличил каждое число на 1 и заметил, что произведение всех 100 чисел не изменилось. Он опять увеличил каждое число на 1, и снова произведение всех чисел не изменилось, и так далее. Всего Гриша повторил эту процедуру k раз, и все k раз произведение чисел не менялось. Найдите наибольшее возможное значение k.

4.7. (*Всеросс., 2015, финал, 11.4*) Дано натуральное число $N \geqslant 3$. Назовём набор из N точек на координатной плоскости *допустимым*, если их абсциссы различны, и каждая из этих точек окрашена либо в красный, либо в синий цвет. Будем говорить, что многочлен $P(x)$ *разделяет* допустимый набор точек, если либо выше графика $P(x)$ нет красных точек, а ниже — нет синих, либо наоборот (на самом графике могут лежать точки обоих цветов). При каком наименьшем k любой допустимый набор из N точек можно разделить многочленом степени не более k?

5 Делимость многочленов

5.1. (*ММО, 1954, 9.1*) Доказать, что если

$$x_0^4 + a_1 x_0^3 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0 + a_4 = 0, \quad 4x_0^3 + 3a_1 x_0^2 + 2a_2 x_0 + a_3 = 0,$$

то $x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4$ делится на $(x - x_0)^2$.

5.2. (*Турнир городов, 1990, 10–11*) Докажите, что при любом натуральном n найдётся ненулевой многочлен $P(x)$ с коэффициентами, равными 0, -1, 1, степени не больше 2^n, который делится на $(x-1)^n$.

5.3. (*ММО, 2014, 10.6, 11.5*) Многочлен $P(x)$ удовлетворяет условиям:

$$P(0) = 1, \quad (P(x))^2 = 1 + x + x^{100} Q(x),$$

где $Q(x)$ — некий многочлен. Докажите, что коэффициент при x^{99} в многочлене $(P(x)+1)^{100}$ равен нулю.

5.4. (*Всеросс., 2006, финал, 11.7*) Известно, что многочлен $(x+1)^n - 1$ делится на некоторый многочлен $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + c_{k-2}x^{k-2} + \ldots + c_1 x + c_0$ чётной степени k, у которого все коэффициенты — целые нечётные числа. Докажите, что n делится на $k+1$.

5.5. (*Всеросс., 2004, финал, 11.3*) Даны многочлены $P(x)$, $Q(x)$. Известно, что для некоторого многочлена $R(x,y)$ выполняется равенство $P(x) - P(y) = R(x,y)(Q(x) - Q(y))$. Докажите, что существует такой многочлен $S(x)$, что $P(x) = S(Q(x))$.

6 Свойства коэффициентов многочлена

6.1. (*ММО, 1957, 7.2*) Известно, что $ax^3 + bx^2 + cx + d$, где a, b, c, d — данные целые числа, при любом целом x делится на 5. Доказать, что все числа a, b, c, d делятся на 5.

6.2. (*ММО, 1957, 8.5*) Известно, что $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, где a, b, c, d, e — данные целые числа, при любом целом x делится на 7. Доказать, что все числа a, b, c, d, e делятся на 7.

6.3. Найдите сумму всех коэффициентов многочлена $(3x^2 + 7x - 11)^{2018}$ после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых.

$\boxed{\text{I}}$

6.4. Найдите сумму коэффициентов при чётных степенях многочлена $(x^3 - x + 1)^{100}$ после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых.

$\boxed{\text{I}}$

6.5. (*Всеросс., 2015, МЭ, 10.2*) Докажите, что если в выражении $(x^2-x+1)^{2014}$ раскрыть скобки и привести подобные слагаемые, то какой-нибудь коэффициент полученного многочлена будет отрицательным.

6.6. (*ММО, 1947, 7–8*) Определить коэффициенты, которые будут стоять при x^{17} и x^{18} после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении $(1+x^5+x^7)^{20}$.

3420 и 0

6.7. Вычислите коэффициент при x^{100} в многочлене $(1+x+x^2+\ldots+x^{100})^3$ после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых.

5151

6.8. (*ММО, 1947, 9–10*) В каком из выражений: $(1-x^2+x^3)^{1000}$, $(1+x^2-x^3)^{1000}$ после раскрытия скобок и приведения подобных членов больший коэффициент при x^{20}?

Во втором

6.9. (*ММО, 2006, 9.4*) В выражении $(x^4+x^3-3x^2+x+2)^{2006}$ раскрыли скобки и привели подобные слагаемые. Докажите, что при некоторой степени переменной x получился отрицательный коэффициент.

6.10. (*Турнир городов, 2016, 10–11*) Все коэффициенты некоторого непостоянного многочлена целые и по модулю не превосходят 2015. Докажите, что любой положительный корень этого многочлена больше чем $1/2016$.

6.11. (*Всеросс., 2004, ОЭ, 10.5*) Уравнение $x^n+a_1x_{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ с целыми ненулевыми коэффициентами имеет n различных целых корней. Докажите, что если каждые два корня взаимно просты, то и числа a_{n-1} и a_n взаимно просты.

6.12. (*Всеросс., 2008, ОЭ, 9.4*) Даны положительные рациональные числа a, b. Один из корней трёхчлена x^2-ax+b — рациональное число, в несократимой записи имеющее вид m/n. Докажите, что знаменатель хотя бы одного из чисел a и b (в несократимой записи) не меньше $n^{2/3}$.

6.13. (*Всеросс., 2009, финал, 10.1*) Найдите все такие натуральные n, что при некоторых отличных от нуля действительных числах a, b, c, d многочлен $(ax+b)^{1000}-(cx+d)^{1000}$ после раскрытия скобок и приведения всех подобных слагаемых имеет ровно n ненулевых коэффициентов.

6.14. (*Всеросс., 2007, финал, 10.2*) Дан многочлен $P(x)=a_0x^n+a_1x_{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$. Положим $m=\min\{a_0, a_0+a_1, \ldots, a_0+a_1+\ldots+a_n\}$. Докажите, что $P(x)\geqslant mx^n$ при $x\geqslant 1$.

6.15. (*Всеросс., 2014, РЭ, 11.7*) Дан многочлен

$$P(x)=a_{2n}x^{2n}+a_{2n-1}x^{2n-1}+\ldots+a_1x+a_0,$$

у которого каждый коэффициент a_i принадлежит отрезку $[100; 101]$. При каком минимальном n у такого многочлена может найтись действительный корень?

6.16. (*ММО, 1939*) Даны два многочлена от переменной x с целыми коэффициентами. Произведение их есть многочлен от переменной x с чётными коэффициентами, не все из которых делятся на 4. Доказать, что в одном из многочленов все коэффициенты чётные, а в другом — хоть один нечётный.

6.17. (*ММО, 1997, 9.6*) Пусть $1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = F(x)G(x)$, где F и G — многочлены, коэффициенты которых — нули и единицы ($n > 1$). Докажите, что один из многочленов F, G представим в виде $\left(1 + x + x^2 + ... + x^{k-1}\right)T(x)$, где $T(x)$ — также многочлен с коэффициентами 0 и 1 ($k > 1$).

6.18. (*ММО, 1994, 10.6*) Существует ли такой многочлен $P(x)$, что у него есть отрицательный коэффициент, а все коэффициенты любой его степени $(P(x))^n$, $n > 1$, положительны?

6.19. (*Всеросс., 2006, ОЭ, 11.2*) Произведение квадратных трёхчленов

$$x^2 + a_1x + b_1, \quad x^2 + a_2x + b_2, \quad \ldots, \quad x^2 + a_nx + b_n$$

равно многочлену

$$P(x) = x^{2n} + c_1x^{2n-1} + c_2x^{2n-2} + \ldots + c_{2n-1}x + c_{2n},$$

где коэффициенты c_1, c_2, $\ldots$, c_{2n} положительны. Докажите, что для некоторого k ($1 \leqslant k \leqslant n$) коэффициенты a_k и b_k положительны.

6.20. (*Всеросс., 1996, ОЭ, 11.4*) Многочлен $P(x)$ степени n имеет n различных действительных корней. Какое наибольшее число его коэффициентов может равняться нулю?

6.21. (*Турнир городов, 1988, 9–10*) $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Известно, что числа 1 и 2 являются его корнями. Докажите, что найдётся коэффициент, который меньше -1.

6.22. (*Всеросс., 2007, финал, 11.6*) Существуют ли такие ненулевые числа a, b, c, что при любом $n > 3$ можно найти многочлен вида $P_n(x) = x^n + \ldots + ax^2 + bx + c$, имеющий ровно n (не обязательно различных) целых корней?

6.23. (*Всеросс., 1996, финал, 11.7*) Существует ли такое конечное множество M ненулевых действительных чисел, что для любого натурального n найдется многочлен степени не меньше n с коэффициентами из множества M, все корни которого действительны и также принадлежат M?

6.24. (*Всеросс., 1995, финал, 10.8, 11.8*) Даны непостоянные многочлены $P(x)$ и $Q(x)$, у которых старшие коэффициенты равны 1. Докажите, что сумма квадратов коэффициентов многочлена $P(x)Q(x)$ не меньше суммы квадратов свободных членов $P(x)$ и $Q(x)$.

7 Кубические многочлены

7.1. Докажите, что $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} = 1$.

7.2. (*Задачник «Кванта», 1971, №6, M88*) Какому условию должны удовлетворять коэффициенты a, b, c уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, чтобы три его корня составляли арифметическую прогрессию?

$\boxed{27c = 3ab - 2a^3,\ a^2 \geqslant 3b}$

7.3. (*Всеросс., 2008, финал, 9.2, 11.1*) Числа a, b, c таковы, что уравнение $x^3+ax^2+bx+c=0$ имеет три действительных корня. Докажите, что если $-2 \leqslant a+b+c \leqslant 0$, то хотя бы один из этих корней принадлежит отрезку $[0;2]$.

7.4. (*Всеросс., 2014, РЭ, 10.5*) На доске написано уравнение $x^3 + *x^2 + *x + * = 0$. Петя и Вася по очереди заменяют звёздочки на рациональные числа: вначале Петя заменяет любую из звёздочек, потом Вася — любую из двух оставшихся, а затем Петя — оставшуюся звёздочку. Верно ли, что при любых действиях Васи Петя сможет получить уравнение, у которого разность каких-то двух корней равна 2014?

7.5. (*Всеросс., 1993, ОЭ, 11.5*) На доске написано: $x^3 + \ldots x^2 + \ldots x + \ldots = 0$. Два школьника по очереди вписывают вместо многоточий действительные числа. Цель первого — получить уравнение, имеющее ровно один действительный корень. Сможет ли второй ему помешать?

7.6. (*Всеросс., 2002, финал, 10.1, 11.1*) Многочлены P, Q и R с действительными коэффициентами, среди которых есть многочлен второй степени и многочлен третьей степени, удовлетворяют равенству $P^2+Q^2=R^2$. Докажите, что все корни одного из многочленов третьей степени — действительные.

7.7. (*Всеросс., 2003, финал, 11.5*) Длины сторон треугольника являются корнями кубического уравнения с рациональными коэффициентами. Докажите, что длины высот треугольника являются корнями уравнения шестой степени с рациональными коэффициентами.

7.8. (*ММО, 2000, 11.4*) У Феди есть три палочки. Если из них нельзя сложить треугольник, Федя укорачивает самую длинную из палочек на сумму длин двух других. Если длина палочки не обратилась в нуль и треугольник снова нельзя сложить, то Федя повторяет операцию, и т. д. Может ли этот процесс продолжаться бесконечно?

8 Разные задачи

8.1. (*Моск. матем. регата, 2014, 10*) Существует ли такой многочлен $f(x)$ степени 6, что для любого x выполнено равенство $f(\sin x)+f(\cos x)=1$?

8.2. (*Моск. матем. регата, 2012, 10*) Существуют ли такие значения a и b, при которых уравнение $x^4-4x^3+6x^2+ax+b=0$ имеет четыре различных действительных корня?

8.3. (*Всеросс., 1994, ОЭ, 9.5*) Известно, что уравнение $ax^5+bx^4+c=0$ имеет три различных корня. Докажите, что уравнение $cx^5+bx+a=0$ также имеет три различных корня.

8.4. (*ММО, 2001, 10.3*) Приведите пример многочлена $P(x)$ степени 2001, для которого выполняется тождество $P(x)+P(1-x)=1$.

8.5. (*ММО, 2011, 11.2*) Сравните между собой наименьшие положительные корни многочленов $x^{2011}+2011x-1$ и $x^{2011}-2011x+1$.

У первого меньше

8.6. (*Всеросс., 2019, РЭ, 10.4, 11.4*) Бесконечная последовательность ненулевых чисел a_1, a_2, a_3, …такова, что при всех натуральных $n \geqslant 2018$ число a_{n+1} является наименьшим корнем многочлена

$$P_n(x) = x^{2n} + a_1x^{2n-2} + a_2x^{2n-4} + \ldots + a_n.$$

Докажите, что существует такое N, что в бесконечной последовательности a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, … каждый член меньше предыдущего.

8.7. (*Всеросс., 2018, финал, 11.1*) Многочлен $P(x)$ таков, что многочлены $P(P(x))$ и $P(P(P(x)))$ строго монотонны на всей вещественной оси. Докажите, что $P(x)$ тоже строго монотонен на всей вещественной оси.

8.8. (*Всеросс., 2000, ОЭ, 11.1*) Докажите, что можно выбрать такие различные действительные числа a_1, a_2, …, a_{10}, что уравнение

$$(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_{10}) = (x + a_1)(x + a_2)\ldots(x + a_{10})$$

будет иметь ровно 5 различных действительных корней.

8.9. (*Всеросс., 2017, финал, 10.6, 11.5*) Пусть $P(x)$ — многочлен степени $n \geqslant 2$ с неотрицательными коэффициентами, а a, b и c — длины сторон некоторого остроугольного треугольника. Докажите, что числа $\sqrt[n]{P(a)}$, $\sqrt[n]{P(b)}$ и $\sqrt[n]{P(c)}$ также являются длинами сторон некоторого остроугольного треугольника.

8.10. (*Всеросс., 2014, финал, 11.7*) Исходно на доске написаны многочлены x^3-3x^2+5 и x^2-4x. Если на доске уже написаны многочлены $f(x)$ и $g(x)$, разрешается дописать на неё многочлены $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $f(g(x))$ и $cf(x)$, где c — произвольная (не обязательно целая) константа. Может ли на доске после нескольких операций появиться ненулевой многочлен вида $x^n - 1$?

8.11. (*ММО, 1953, 9.3, 10.3*) Докажите, что многочлен вида $x^{200}y^{200} + 1$ нельзя представить в виде произведения многочленов от одного только x и одного только y.

8.12. (*ММО, 2003, 10.3*) Пусть $P(x)$ — многочлен со старшим коэффициентом 1, а последовательность целых чисел a_1, a_2, …такова, что $P(a_1) = 0$, $P(a_2) = a_1$, $P(a_3) = a_2$ и т. д. Числа в последовательности не повторяются. Какую степень может иметь $P(x)$?

8.13. (*ММО, 2003, 10.6*) Дана бесконечная последовательность многочленов $P_1(x)$, $P_2(x)$, …. Всегда ли существует конечный набор функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_N(x)$, композициями которых можно записать любой из них (например, $P_1(x) = f_2(f_1(f_2(x))))$?

8.14. (*ММО, 2003, 11.2*) Дан многочлен $P(x)$ степени 2003 с действительными коэффициентами, причем старший коэффициент равен 1. Имеется бесконечная последовательность целых чисел a_1, a_2, …, такая, что $P(a_1) = 0$, $P(a_2) = a_1$, $P(a_3) = a_2$ и т. д. Докажите, что не все числа в последовательности a_1, a_2, …различны.

8.15. (*ММО, 1995, 11.4*) Разрезать отрезок $[-1; 1]$ на чёрные и белые отрезки так, чтобы интегралы от любой а) линейной функции; б) квадратного трёхчлена по белым и чёрным отрезкам были равны.

8.16. (*ММО, 2016, 11.5*) Про приведённый многочлен $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ с действительными коэффициентами известно, что при некотором натуральном $m \geqslant 2$ многочлен $\underbrace{P(P(\ldots P}_{m \text{ раз}}(x)\ldots))$ имеет действительные корни, причём только положительные. Обязательно ли сам многочлен $P(x)$ имеет действительные корни, причём только положительные?

8.17. (*Турнир городов, 2014, 10–11*) Найдите все n, для которых верно утверждение: для любых двух многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ степени n найдутся такие одночлены ax^k и bx^l, где $0 \leqslant k \leqslant n$, $0 \leqslant l \leqslant n$, что графики многочленов $P(x) + ax^k$ и $Q(x) + bx^l$ не будут иметь общих точек.

8.18. (*Турнир городов, 2007, 10–11*) Пусть $f(x)$ — некоторый многочлен ненулевой степени. Может ли оказаться, что уравнение $f(x) = a$ при любом значении a имеет чётное число решений?

8.19. (*Турнир городов, 2008, 10–11*) Многочлен степени $n > 1$ имеет n разных корней x_1, x_2, $\ldots$, x_n. Его производная имеет корни y_1, y_2, $\ldots$, y_{n-1}. Докажите неравенство

$$\frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{n} > \frac{y_1^2 + \ldots + y_{n-1}^2}{n}.$$

8.20. (*Всеросс., 2012, финал, 10.4*) Изначально на доске были написаны одночлены 1, x, x^2, $\ldots$, x^n. Договорившись заранее, k мальчиков каждую минуту одновременно вычисляли каждый сумму каких-то двух многочленов, написанных на доске, и результат дописывали на доску. Через m минут на доске были написаны, среди прочих, многочлены $S_1 = 1 + x$, $S_2 = 1 + x + x^2$, $S_3 = 1 + x + x^2 + x^3$, $\ldots$, $S_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$. Докажите, что $m \geqslant \frac{2n}{k+1}$.

8.21. (*ММО, 1965, 11.1*) Все коэффициенты многочлена равны 1, 0 или -1. Докажите, что все его действительные корни (если они существуют) заключены в отрезке $[-2; 2]$.

8.22. (*Всеросс., 1996, финал, 10.4, 11.4*) Докажите, что если числа a_1, a_2, $\ldots$, a_m отличны от нуля и для любого целого $k = 0, 1, \ldots, n$ ($n < m - 1$) выполняется равенство

$$a_1 + a_2 \cdot 2^k + a_3 \cdot 3^k + \ldots + a_m m^k = 0,$$

то в последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_m$ есть по крайней мере $n+1$ пара соседних чисел, имеющих разные знаки.

8.23. (*Всеросс., 2010, финал, 11.4*) Дано натуральное число $n \geqslant 3$. При каком наименьшем k верно следующее утверждение? Для любых n точек $A_i = (x_i, y_i)$ на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и любых вещественных чисел c_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) существует такой многочлен $P(x, y)$, степень которого не больше k, что $P(x_i, y_i) = c_i$ при всех $i = 1, \ldots, n$.

(Многочленом от двух переменных называется функция вида

$$P(x, y) = a_{0,0} + a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2 + \ldots + a_{k,0}x^k + a_{k-1,1}x^{k-1}y + \ldots + a_{0,k}y^k.$$

Степенью ненулевого одночлена $a_{i,j}x^iy^j$ называется число $i + j$; степенью многочлена $P(x, y)$ называется наибольшая степень входящего в него одночлена.)

8.24. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2013, 8*) Учитель написал на доске многочлены с целыми коэффициентами:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad \text{и} \quad Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

и дал задание найти целое значение x, такое, что $P(x)$ делится (нацело) на $Q(x)$. Петя Васечкин взялся за дело и, взяв для начала $x = 0$, получил $P(0) = 4$, $Q(0) = 3$. «Не делится», — подумал Петя, и решил подставить $x = 1$. Получилось $P(1) = -137$, $Q(1) = 0$. «На ноль делить нельзя», — подумал Петя. Он попробовал взять $x = 2$, но там получались большие числа и Петя запутался в вычислениях. Напоследок он решил попробовать взять $x = -1$ и получил $P(-1) = 137$, $Q(-1) = -6$. «Да таких значений x просто не существует!» — воскликнул Петя. Прав ли он?

Да

8.25. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2013, 9*) Найдите a и b такие, что многочлен $x^{2013}+x^{99}+ax+b$ делится нацело на $x^2 - x + 1$.

$a = 0$, $b = 2$

8.26. (*«Ломоносов», 2014, 8–9*) Многочлен $a_{2014}x^{2014} + a_{2013}x^{2013} + a_1 x + a_0$ при всех значениях x совпадает с функцией

$$y = \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-2014)}{2014!}.$$

Найдите сумму чисел $a_2 + a_4 + \ldots + a_{2014}$.

1006,5

8.27. (*«Высшая проба», 2013, 9*) Триномом степени p называется функция вида

$$f(x) = x^p + ax^q + 1,$$

где p, q — натуральные числа, $q < p$, и a — произвольное вещественное число (быть может, равное нулю). Найдите все разложения многочлена $x^{12} + 1$ в произведение пары триномов.

$(x^4+1)(x^8-x^4+1)$, $\left(x^6-\sqrt{2}x^3+1\right)\left(x^6+\sqrt{2}x^3+1\right)$

8.28. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2019, 10–11*) Определите значение функции

$$f(x) = x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

в точке $x = 2018$, если $f(2019) = f(2023) = 0$, $f(2020) = f(2022) = 3$, $f(2021) = 4$.

-125

8.29. (*«Высшая проба», 2013, 11*) Триномом степени p называется функция вида

$$f(x) = x^p + ax^q + 1,$$

где p, q — натуральные числа, $q < p$, и a — произвольное вещественное число (быть может, равное нулю). Найдите все пары триномов, которые дают в произведении трином степени 15.

$(1+x^5)(1-x^5+x^{10})$, $(1-x^3+x^9)(1+x^3+x^6)$, $(1-x^6+x^9)(1+x^3+x^6)$

8.30. (*«Курчатов», 2015, 10*) $f(x) = x^3 - 4x$, $g(x) = x^3 - 4x^2 + 1$. Докажите, что при любом $a > 0$ многочлен $af + g$ имеет не менее трёх различных корней.

8.31. (*«Курчатов», 2015, 11*) $f(x) = x^3 - 9x$, $g(x) = x^3 - 5x^2 + 1$. Докажите, что если $b > 0$, то у многочлена $f + bg$ есть не менее трёх различных действительных корней.