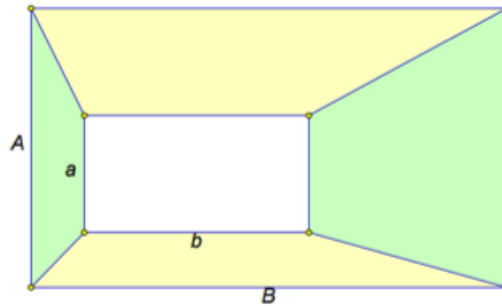


## Планиметрия на олимпиаде «Покори Воробьёвы горы!»

1. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 8) Внутри большого прямоугольника размером  $A \times B$  расположен маленький прямоугольник размером  $a \times b$  (см. рисунок).



Найдите разность между суммарной площадью жёлтых и суммарной площадью зелёных четырёхугольников.

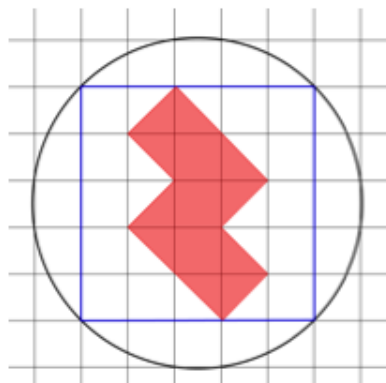
$$Ab - Ba$$

2. («Покори Воробьёвы горы!», 2019, 5–8) Найдите периметр зеленой фигуры (см. рис.), если известно, что диаметр круга равен 12, а все прямоугольники, образующие сетку — одинаковые.



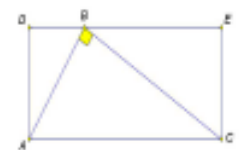
$$24$$

3. («Покори Воробьёвы горы!», 2019, 5–8) На клетчатой бумаге нарисовали квадрат и описали около него окружность радиуса 10. Найдите периметр красного многоугольника.



$$40$$

4. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 7–9) Около прямоугольного треугольника  $ABC$  с катетами  $AB = 5$  и  $BC = 6$  описали прямоугольник  $ADEC$ , как показано на рисунке. Какова площадь  $ADEC$ ?



$$30$$

5. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 7–9) В трапеции  $ABCD$  с основаниями  $AD \parallel BC$  диагонали пересекаются в точке  $E$ . Известны площади  $S(\triangle ADE) = 12$  и  $S(\triangle BCE) = 3$ . Найдите площадь трапеции.

27

6. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 8–9) В трапеции известны длины диагоналей — 6 и 8, а также длина средней линии — 5. Найдите высоту трапеции.

4,8

7. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 8–9) В четырёхугольнике  $ABCD$  известно, что  $AB = BC$ ,  $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$ . Из вершины  $B$  опущен перпендикуляр  $BH$  на сторону  $AD$ . Найдите площадь четырёхугольника  $ABCD$ , если известно, что  $BH = h$ .

24

8. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 8) В трапеции диагонали пересекаются под прямым углом и одна из них равна средней линии. Определите, какой угол образует эта диагональ с основаниями трапеции.

60°

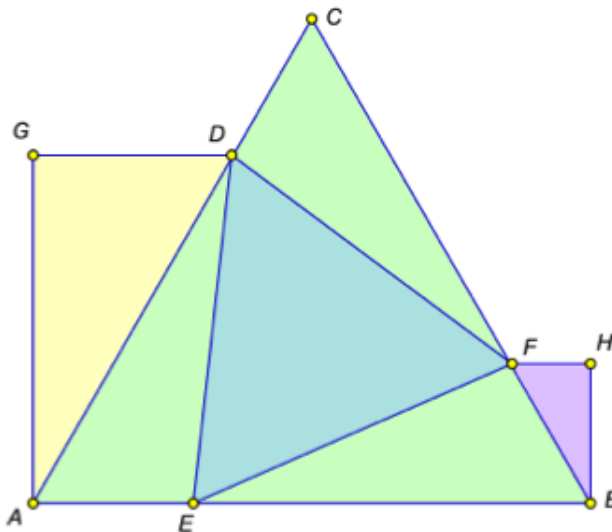
9. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 8–9) В треугольнике  $ABC$  известны стороны  $AB = 5$  и  $AC = 6$ . Какой должна быть сторона  $BC$ , чтобы угол  $ACB$  был максимально возможным?

11/2

10. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 8–9) Петя хотел нарисовать правильный треугольник  $ABC$ . Но, поскольку он рисовал неточно, получился треугольник с углами  $\angle A = 59^\circ$  и  $\angle B = 63^\circ$ . Потом Петя провёл высоты  $CE$  и  $BD$ , но, поскольку угольник был слегка перекошен, получил углы  $\angle ADB = \angle AEC = 92^\circ$ . Найдите градусную меру угла  $AED$ .

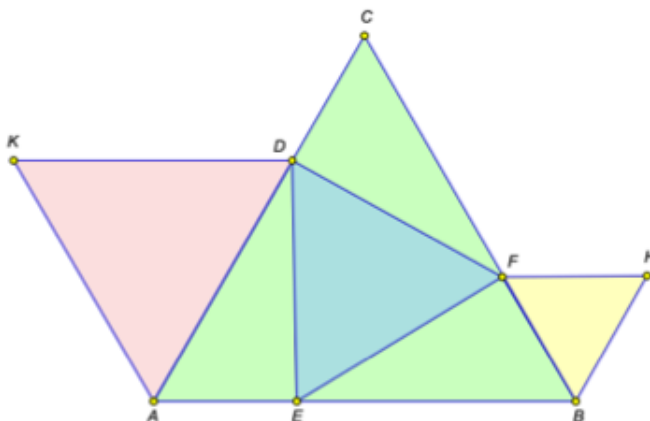
88

11. («Покори Воробьёвы горы!», 2019, 9) В равносторонний треугольник  $ABC$  вписан равносторонний треугольник  $DEF$  (см. рис.). Треугольники  $AGD$  и  $BFH$  — прямоугольные, катеты  $GD$  и  $FH$  параллельны прямой  $AB$ . Площадь треугольника  $AGD$  равна 9, а треугольника  $BFH$  — 1. Найдите площадь треугольника  $DEF$ .



14

12. («Покори Воробьёвы горы!», 2019, 9) В равносторонний треугольник  $ABC$  вписан равносторонний треугольник  $DEF$  (см. рис.). Треугольники  $AKD$  и  $BFH$  — тоже равносторонние, стороны  $KD$  и  $FH$  параллельны прямой  $AB$ . Площадь треугольника  $AKD$  равна 9, а треугольника  $BFH$  — 1. Найдите площадь треугольника  $DEF$ .



2

13. («Покори Воробьёвы горы!», 2018, 9) Назовём «зазубриванием» следующую операцию над многоугольником.



а) Каждую сторону многоугольника делим на три равные части.

б) Среднюю часть выбираем в качестве основания равностороннего треугольника, расположенного снаружи многоугольника.

в) Удаляем основание и добавляем две другие стороны.

Пусть  $M_0$  — равносторонний треугольник,  $M_1$  — многоугольник, полученный путём зазубривания  $M_0$ ,  $M_2$  получен зазубриванием  $M_1$  (см. рисунок),  $\dots$ ,  $M_{2018}$  получен зазубриванием  $M_{2017}$ .

Найдите  $S(M_{2018})$ , если известно, что  $S(M_0) = 3$ . В ответе укажите значение  $S(M_{2018})$ , округлённое до сотых.

4,8

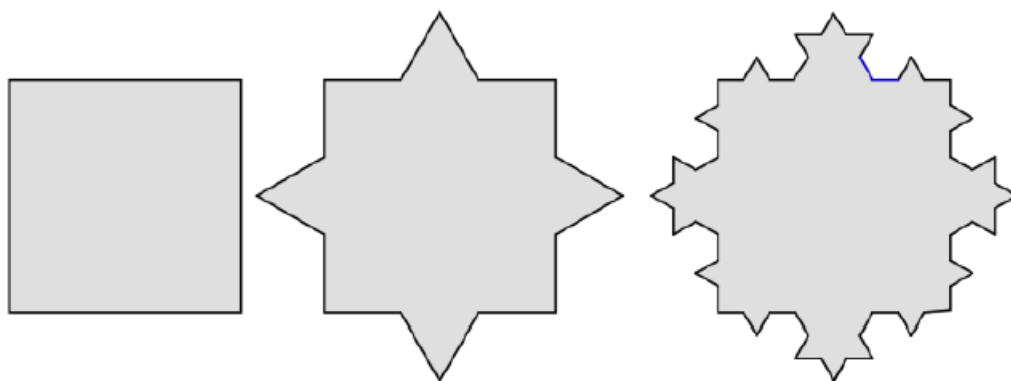
14. («Покори Воробьёвы горы!», 2018, 9) Назовём «зазубриванием» следующую операцию над многоугольником.

а) Каждую сторону многоугольника делим на три равные части.

б) Среднюю часть выбираем в качестве основания равностороннего треугольника, расположенного снаружи многоугольника.

в) Удаляем основание и добавляем две другие стороны.

Пусть  $K_0$  — квадрат со стороной 2,  $K_1$  — многоугольник, полученный путём зазубривания  $K_0$ ,  $K_2$  получен зазубриванием  $K_1$  (см. рисунок),  $\dots$ ,  $K_{2018}$  получен зазубриванием  $K_{2017}$ .



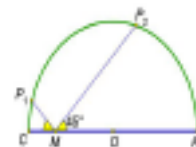
Найдите площадь  $S(K_{2018})$ . Ответ округлите до сотых по стандартным математическим правилам.

4,9

15. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 9) В трапеции  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$  известен угол  $B CD$ , равный  $120^\circ$ . В этот угол вписана окружность радиуса 1, проходящая через точки  $A$ ,  $B$  и  $D$ . Найдите площадь треугольника  $ABD$ .

$\frac{4}{\sqrt{3}}$

16. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 9) Марк Уотни испытывает на прочность новый купол, предназначенный для экспедиции на Марс. Купол выполнен в форме полусферы радиуса 20 м. Марк поворачивается на север и стреляет под углом  $45^\circ$  к земле, потом поворачивается на юг и тоже стреляет под углом  $45^\circ$  (см. рис). Какие значения может принимать  $|P_1P_2|$  — расстояние между точками попадания?



$20\sqrt{2}$

17. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 9) На диаметре  $AB$  выбрана точка  $M$ . Точки  $C$  и  $D$ , лежащие на окружности по одну сторону от  $AB$ , выбраны так, что  $\angle AMC = \angle BMD = 30^\circ$ . Найдите диаметр окружности, если известно, что  $CD = 12$ .

$8\sqrt{8}$

18. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 9) Дан прямоугольный треугольник  $ABC$  с катетами  $BC = 30$  и  $AC = 40$ . На сторонах  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  выбраны точки  $C_1$ ,  $A_1$ ,  $B_1$  соответственно так, что  $AC_1 = BA_1 = CB_1 = 1$ . Найдите площадь треугольника  $A_1B_1C_1$ .

$554,2$

19. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 9) В трапеции  $KLMN$  известны основания  $KN = 25$ ,  $LM = 15$  и боковые стороны  $KL = 6$ ,  $MN = 8$ . Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований.

5

20. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 9) Окружность с диаметром  $AB$  пересекает отрезки  $AC$  и  $BC$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно, причём длина отрезка  $MN$  равна радиусу окружности. Найдите площадь четырехугольника  $ABNM$ , если известно, что  $AC = 12$  и  $BC = 8$ .

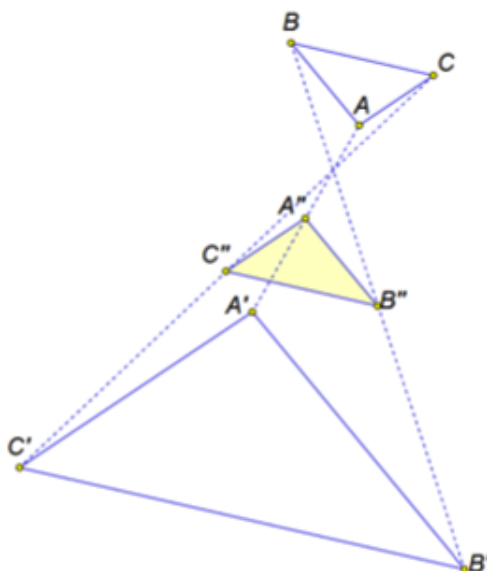
$18\sqrt{81}$

21. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 9) В треугольник  $ABC$  вписана окружность с центром  $O$ , к которой проведена касательная, пересекающая стороны  $AC$  и  $AB$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно. Найдите угол  $A$  треугольника  $ABC$ , если  $\angle MON = 26^\circ$ .

$128^\circ$

22. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 9) Даны треугольники  $ABC$  и  $A'B'C'$ , площади которых равны 1 и 2025 соответственно. Известно, что лучи  $AB$  и  $A'B'$  параллельны и идут в противоположных направлениях (см. рисунок). То же верно и для пар  $BC$  и  $B'C'$ ,  $CA$  и  $C'A'$ . Точки  $A''$ ,  $B''$  и  $C''$  — середины отрезков  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$ . Найдите площадь треугольника  $A''B''C''$ .

484



23. («Покори Воробьёвы горы!», 2019, 10–11) В равнобедренном треугольнике  $ABC$  на высоте  $BH$ , равной основанию  $AC$ , как на диаметре, построена окружность, пересекающая боковую сторону  $BC$  в точке  $F$ . Каково отношение площади треугольника  $FCH$  к площади треугольника  $ABC$ ? Какая часть площади треугольника  $ABC$  находится внутри окружности?

$\left(\frac{5}{4} + \frac{5}{4} \arcsin \frac{2}{1} : \frac{01}{1}\right)$

24. («Покори Воробьёвы горы!», 2019, 10–11) В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  известно, что  $\angle CAD = \angle CDB$  и  $\angle BAD = \angle CDA = 60^\circ$ .

1. Можно ли в четырехугольник  $ABCD$  вписать окружность?
2. Найдите минимум отношения стороны  $BC$  к стороне  $AD$ .

$\frac{2}{1} (2 : \text{лен } 1)$

25. («Покори Воробьёвы горы!», 2019, 10–11) В треугольнике  $ABC$ ,  $\angle A = 2\alpha$ , биссектрисы  $BD$  и  $CE$  пересекаются в точке  $I$ . Найдите наименьший возможный радиус окружности, описанной около треугольника  $DEI$ , если сумма длин отрезков  $DI$  и  $EI$  равна  $2d$ .

$\frac{(a+z/y) \sin z}{((a+z/y) \cos - 1) z \sqrt{p}} = \mathcal{U}$

26. («Покори Воробьёвы горы!», 2019, 10–11) Найдите площадь выпуклого четырехугольника  $ABCD$ , в котором  $AB = 3$ ,  $AD = 4$ ,  $AC = 6$ , а площадь треугольника  $ABC$  равна площади треугольника  $ADC$  и в два раза больше площади треугольника  $ABD$ .

$\sqrt{8}$

27. («Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11) Найдите площадь треугольника  $ABC$ , в котором  $AB = 4$ ,  $AC = 5$  и  $\cos(\angle B - \angle C) = \frac{11}{16}$ .

$$\frac{7}{91\sqrt{5}}$$

28. («Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11) В окружности радиуса  $5\sqrt{2}$  проведены взаимно перпендикулярные хорды, которые точкой пересечения делятся в отношении  $6 : 1$  и  $2 : 3$ . Найдите расстояние от центра окружности до точки пересечения хорд.

$$9\sqrt{2}$$

29. («Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11) В треугольник  $ABC$ , в котором сумма сторон  $AB$  и  $BC$  в  $9/5$  раз больше стороны  $AB$ , вписана окружность, касающаяся сторон  $BC$ ,  $AC$  и  $AB$  в точках  $M$ ,  $N$  и  $K$  соответственно. Отношение площади треугольника  $MNC$  к площади треугольника  $ABC$  равно  $r$ . Найдите при данных условиях:

- наименьшее значение  $r$ ;
- все возможные значения  $r$ .

$$\left(\frac{1}{2}; \frac{18}{91}\right] \cup \left(9; \frac{18}{91}\right) \cup$$

30. («Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11) Внутри треугольника  $ABC$  взята такая точка  $D$ , что  $\angle ABD = \angle CBD = 40^\circ$ ,  $\angle ACD = 20^\circ$ ,  $\angle CAD = 30^\circ$ . Найдите:

- углы  $BAD$  и  $BCD$ ;
- расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников  $ABC$  и  $BCD$ , если  $BC = 3$ .

$$\sqrt{3} \cup (9; 30^\circ; \angle BCD = 20^\circ; \angle BAD = 30^\circ) \cup$$

31. («Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11) Прямая, проходящая через точки, симметричные основанию высоты  $AD$  остроугольного треугольника  $ABC$  относительно сторон  $AC$  и  $AB$ , пересекает эти стороны в точках  $E$  и  $F$  соответственно. Найдите расстояние от точки  $B$  до точки пересечения отрезков  $BE$  и  $CF$ , если  $AC = b$  и  $\angle ABC = \beta$ .

$$b \sin \beta \cos \beta = x$$

32. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 10–11) Медиана  $AM$  треугольника  $ABC$  перпендикулярна его биссектрисе  $BL$ . Найдите площадь треугольника  $ABM$ , если площадь треугольника  $ABL$  равна 10.

$$15$$

33. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 10–11) Продолжение биссектрисы  $AD$  треугольника  $ABC$  пересекает окружность, описанную вокруг этого треугольника, в точке  $E$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $BC = a$ ,  $\angle BAC = \alpha$ ,  $AE = d$ .

$$\frac{a}{2} \sin \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right)$$

34. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 10–11) В прямоугольном треугольнике  $ABC$  из вершины прямого угла  $C$  проведена высота  $CK$ . Периметр треугольника  $ABC$  равен 13, а периметр треугольника  $BCK$  равен 5. Найдите периметр треугольника  $ACK$ .

$$12$$

35. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 10–11) В равнобедренном треугольнике  $ABC$  с основанием  $AC$  и  $\angle ABC = \frac{\pi}{9}$  на стороне  $AB$  выбрана точка  $D$  так, что  $BD = AC$ . Найдите величину угла  $DCB$  (в радианах) и сравните её с  $0,18$ .

$$\boxed{81'0 > \frac{81}{\pi}}$$

36. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11) Серединами оснований  $BC$  и  $AD$  трапеции  $ABCD$  являются точки  $K$  и  $L$  соответственно. Известно, что  $AD = 10 \cdot BC$ . На боковых сторонах  $AB$  и  $CD$  взяты соответственно точки  $M$  и  $N$  так, что прямая  $MN$  параллельна основаниям трапеции. При каком значении отношения  $AM : MB$  сумма площадей треугольников  $BKN$  и  $MNL$  будет наибольшей?

$$\boxed{19 : 61}$$

37. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11) В окружность с центром  $O$  вписан четырёхугольник  $ABCD$ , диагонали  $AC$  и  $BD$  которого пересекаются в точке  $M$ , причём  $AM = 4$ ,  $AB = 6$ . Определите, какой может быть наименьшая длина диагонали  $BD$ , если известно, что стороны  $AB$  и  $AD$  равноудалены от точки  $O$ .

$$\boxed{4\sqrt{5}}$$

38. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11) На сторонах  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  расположены точки  $M$  и  $N$  соответственно. При этом  $AM : MB = 3 : 1$ ,  $CN : NB = 1 : 7$ . Какой процент от площади четырёхугольника  $AMNC$  составляет площадь треугольника  $MBN$ ?

$$\boxed{28\%}$$

39. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11) Окружности с центрами в точках  $O_1$  и  $O_2$  пересекаются внешним образом в точках  $A$  и  $B$  (то есть точки  $O_1$  и  $O_2$  лежат по разные стороны от прямой  $AB$ ). Известно, что  $\angle AO_1B = \alpha$ ,  $\angle AO_2B = \beta$  и  $O_1O_2 = a$ . Найдите радиусы окружностей.

$$\boxed{R_1 = \frac{a \sin \frac{\alpha}{2}}{\beta \sin \frac{\alpha + \beta}{2}}, R_2 = \frac{a \sin \frac{\beta}{2}}{\alpha \sin \frac{\alpha + \beta}{2}}}$$

40. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11) Окружность касается одной из сторон угла с вершиной  $A$  в точке  $B$  и пересекает вторую сторону в точках  $C$  и  $D$ , причём  $AD$  в три раза меньше  $AC$ . Косинус угла  $A$  равен  $\sqrt{3}/4$ .

- Найдите отношение  $BC : BD$ .
- Найдите отношение радиуса окружности к  $BD$ .

$$\boxed{\frac{13}{10} \sqrt{6} \wedge \frac{13}{10} \sqrt{6} \wedge (a)}$$

41. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11) В четырёхугольник  $ABCD$  со сторонами  $AB = 2$ ,  $BC = 4$ ,  $CD = 5$  вписали окружность и вокруг него описали окружность. Найдите площадь четырёхугольника.

$$\boxed{2\sqrt{30}}$$



42. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11) Города  $A, B, C, D, E$  лежат на одной окружности и попарно соединены прямолинейными дорогами. Два велосипедиста выехали одновременно из  $A$  в  $D$  и из  $C$  в  $E$ , повстречавшись в пути. Затем они выехали одновременно из  $D$  в  $B$  и из  $E$  в  $C$ , опять повстречавшись в пути. Наконец, они выехали одновременно из  $B$  в  $E$  и из  $C$  в  $B$ , прибыв в пункты назначения одновременно. Найдите  $BC$ , если  $AE = 2$  км и  $CD = 4$  км, а скорость каждого велосипедиста постоянна.

км 91

43. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) В треугольнике  $ABC$  стороны  $AB$  и  $BC$  равны соответственно 3 и 1. Биссектриса  $BD$  равна  $\sqrt{2}$ . Найдите угол  $BAC$ .

$\frac{\sqrt{2}}{3}$  градус

44. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) В треугольнике  $ABC$  биссектрисы  $AA_1$  и  $BB_1$  пересекаются в точке  $O$ . Известно, что  $2 \cdot AO = 7 \cdot OA_1$ ,  $BO = 2 \cdot OB_1$ . Найдите отношение высоты, опущенной из точки  $A$ , к радиусу вписанной в треугольник  $ABC$  окружности.

7/6

45. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) Треугольник  $ABC$  вписан в окружность с центром в точке  $O$ . Биссектрисы внутренних углов треугольника при вершинах  $A$  и  $B$  пересекают описанную окружность в точках  $A_1$  и  $B_1$  соответственно. Угол между биссектрисами равен  $60^\circ$ . Длина стороны  $AB$  равна 3. Найдите площадь треугольника  $A_1B_1O$ .

$\frac{\pi}{\sqrt{3}}$

46. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) В четырёхугольник  $ABCD$  вписана окружность с центром  $O$ , при этом  $\angle AOB = 75^\circ$ ,  $AB = 3$ . Найдите площадь круга, ограниченного описанной вокруг треугольника  $ABE$  окружностью, где  $E$  — точка пересечения прямых  $AD$  и  $BC$ .

$\pi 6$

47. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) Косинус острого угла прямоугольного треугольника равен  $2/\sqrt{5}$ . Через середины одного катета и гипотенузы провели окружность, касающуюся другого катета. Найдите отношение части гипотенузы, лежащей внутри получившегося круга, ко всей гипотенузе.

2/5 или 11/40

48. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) Окружность радиуса 1 проходит через вершины  $A$  и  $B$  треугольника  $ABC$  и пересекает стороны  $AC$  и  $BC$  в точках  $M$  и  $K$  соответственно. Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AB = \sqrt{3}$ ,  $MK = 1$ , а центр окружности находится внутри треугольника  $ABC$  на расстоянии 5 от точки  $C$ .

$\sqrt{9}$

49. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) В прямоугольном треугольнике  $ABC$  угол  $C$  прямой. На стороне  $AC$  как на диаметре построена окружность. Из вершины  $B$  проведена касательная к окружности, отличная от  $BC$ , и  $D$  — точка касания. Точка  $H$  является основанием перпендикуляра, проведённого из точки  $D$  на сторону  $AC$ . Найдите отношение  $DH : EH$ , где  $E$  — точка пересечения  $DH$  и  $AB$ .

2