

Планиметрия на ОММО

Задачи по планиметрии на [ОММО](#), как правило, не требуют особых вычислений. Однако почти в каждой задаче есть «изюминка» — изящная и не всегда простая идея. Если уловить эту идею, то дальнейшее решение труда не представляет.

1. (ОММО, 2019) Точка O лежит внутри равнобедренного прямоугольного треугольника ABC . Расстояние от неё до вершины A прямого угла равно 6, до вершины B равно 4, до вершины C равно 8. Найти площадь треугольника ABC .

2^9 + 20

2. (ОММО, 2019) Дан треугольник ABC . На отрезках AB и BC выбраны точки X и Y соответственно так, что $AX = BY$. Оказалось, что точки A, X, Y и C лежат на одной окружности. Пусть BL — биссектриса треугольника ABC (L на отрезке AC). Докажите, что $XL \parallel BC$.

3. (ОММО, 2018) В трапецию $ABCD$ вписана окружность, касающаяся боковой стороны AD в точке K . Найдите площадь трапеции, если $AK = 16$, $DK = 4$ и $CD = 6$.

437

4. (ОММО, 2018) Точки A_1, B_1, C_1 — точки пересечения продолжений высот остроугольного треугольника ABC с описанной вокруг ABC окружностью. Окружность, вписанная в треугольник $A_1B_1C_1$, касается одной из сторон ABC , а один из углов треугольника ABC равен 40° . Найдите два других угла треугольника ABC .

08 и 09

5. (ОММО, 2017) Пусть L — точка пересечения диагоналей CE и DF правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной 3. Точка K такова, что $\vec{LK} = 3\vec{AB} - \vec{AC}$. Определите, лежит ли точка K внутри, на границе или вне $ABCDEF$, а также найдите длину отрезка KC .

Вне; $\sqrt{3}$

6. (ОММО, 2017) В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC ($AD > BC$) боковая сторона равна 20 см, угол BAC равен 45° . Пусть O — центр окружности, описанной вокруг $ABCD$. Оказалось, что прямые OD и AB перпендикулярны. Найдите длину основания AD трапеции.

10 ($\sqrt{2} + \sqrt{9}$) см

7. (ОММО, 2016, 9–10) Трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD такова, что $AC = BC + AD$, а один из углов между прямыми AC и BD равен 60° . Докажите, что $ABCD$ — равнобокая трапеция.

8. (ОММО, 2016, 11) Пусть OP — диаметр окружности Ω , ω — окружность с центром в точке P и радиусом меньше, чем у Ω . Окружности Ω и ω пересекаются в точках C и D . Хорда OB окружности Ω пересекает вторую окружность в точке A . Найдите длину отрезка AB , если $BD \cdot BC = 5$.

5^2

9. (ОММО, 2016, 9–10) На сторонах AD и BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбраны точки F и E соответственно таким образом, что $AF/FD = BE/EC = AB/CD$. Продолжение отрезка EF за точку F пересекает прямую AB в точке P , а прямую CD — в точке Q . Докажите, что $\angle BPE = \angle CQE$.

10. (ОММО, 2016, 11) В треугольнике ABC с отношением сторон $AB : AC = 5 : 4$ биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке L . Найдите длину отрезка AL , если длина вектора $4 \cdot \vec{AB} + 5 \cdot \vec{AC}$ равна 2016.

222

11. (ОММО, 2015, 9–11) Основания AB и CD трапеции $ABCD$ равны 65 и 31 соответственно, а её диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите скалярное произведение векторов \vec{AD} и \vec{BC} .

2015

12. (ОММО, 2015, 9–11) Прямая s задается уравнением $y = 2x$. Точки A и B имеют координаты $A(2, 2)$ и $B(6, 2)$. На прямой s найдите точку C , из которой отрезок AB виден под наибольшим углом.

(2,4)

13. (ОММО, 2014) Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Точки M, N, P и Q — середины сторон AB, BC, CD и DE соответственно, точки H и K — середины MP и NQ соответственно. Найдите длину отрезка HK , если $AE = 7$.

$\frac{7}{2}$

14. (ОММО, 2014) Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, а боковые стороны образуют угол 30° . Основания имеют длины 6 и 2. Найдите высоту трапеции.

$3\sqrt{2}$

15. (ОММО, 2013) В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ прямые AD и BC перпендикулярны, а длина отрезка, соединяющего середины диагоналей BD и AC , равна 2013. Найдите длину отрезка, соединяющего середины сторон CD и AB .

2013

16. (ОММО, 2013) На плоскости задана точка P . Рассматриваются различные равносторонние треугольники ABC , такие что $PA = 2, PB = 3$. Какое максимальное значение может принимать длина отрезка PC ?

5

17. (ОММО, 2012) Длина медианы AD треугольника ABC равна 3, длины сторон AB и AC — 5 и 7 соответственно. Найдите площадь треугольника ABC .

$9\sqrt{9}$

18. (ОММО, 2012) На одной из сторон острого угла с вершиной O взяты точки A и B , а на другой — точка C . При какой длине отрезка OC величина угла ACB максимальна, если $OA = 1, OB = 5$?

$3\sqrt{5}$

19. (ОММО, 2011) Три правильных пятиугольника имеют общий центр, их стороны соответственно параллельны. Стороны двух пятиугольников равны 4 см и 12 см. Третий пятиугольник делит площадь фигуры, заключённой между первыми двумя, в отношении 1 : 3, считая от меньшего пятиугольника. Найдите сторону третьего пятиугольника.

$4\sqrt{3}$

20. (ОММО, 2011) В равнобедренном треугольнике с периметром 60 см точка пересечения медиан лежит на вписанной окружности. Найдите стороны треугольника.

25, 25, 10

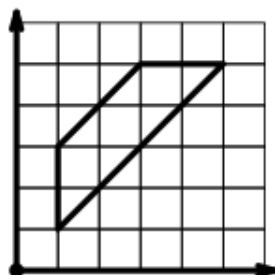
21. (ОММО, 2010) Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC , пересекает сторону AB в точке E и сторону BC в точке F . Найдите радиус окружности, если $AC = 6$, $\angle AEC = 5\angle BAF$, $\angle ABC = 72^\circ$.

3

22. (ОММО, 2010) Вершины K, L, M, N четырёхугольника $KLMN$ лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$. Найти наименьший возможный периметр четырёхугольника $KLMN$, если известно, что $AK = 2$ см, $BK = 4$ см и $AN = ND$.

$\sqrt{18} + \sqrt{10}$ см

23. (ОММО, 2009) Найдите координаты центра и радиус окружности, описанной около четырёхугольника на рисунке, если сторона клетки равна 1.



$(1, 2); \sqrt{10}$

24. (ОММО, 2009) Дана трапеция с основаниями 1 и 4 и площадью S . Найдите площадь треугольника, образованного диагоналями и меньшим основанием трапеции.

$S/25$

25. (ОММО, 2009) Радиус вписанной в треугольник окружности равен 1, а длины высот выражаются натуральными числами. Найдите стороны треугольника.

$2\sqrt{3}$