

Планиметрия на олимпиаде «Ломоносов»

1. («Ломоносов», 2019, 7–8) В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведены биссектриса BD и высота CH . Из вершины C на биссектрису BD опущен перпендикуляр CK . Найдите угол HCK , если $BK : KD = 3 : 1$.

30°

2. («Ломоносов», 2016, 7–9) В прямоугольнике $ABDF$ на сторонах $BD = 2$ и $DF = 3$ выбрали точки C и E соответственно, так, что треугольник AFE равен треугольнику EDC . Потом от прямоугольника $ABDF$ отрезали треугольники ABC , CDE и AFE . Найдите углы оставшегося треугольника.

90°, 45°, 45°

3. («Ломоносов», 2015, 8) В равностороннем треугольнике ABC на стороне BC выбраны точки A_1 и A_2 так, что $BA_1 = A_1A_2 = A_2C$. На стороне AC выбрана точка B_1 так, что $AB_1 : B_1C = 1 : 2$. Найдите сумму углов AA_1B_1 и AA_2B_1 .

30°

4. («Ломоносов», 2012, 8) На сторонах AB , BC , CD и DA равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD отметили точки K , L , M и N соответственно. Оказалось, что $KLMN$ — параллелограмм. Докажите, что $KP = MQ$, где P и Q — середины сторон AB и CD соответственно.

5. («Ломоносов», 2011, 8) Из вершины прямого угла C треугольника ABC проведена медиана CM . Окружность, вписанная в треугольник ACM , касается стороны CM в её середине. Найдите углы треугольника ABC .

30°, 60°, 90°

6. («Ломоносов», 2014, 8–9) Хорда AC образует угол 32° с диаметром AD . Из центра окружности O опущен перпендикуляр OH на хорду AC , его продолжение пересекает окружность в точке B . Найдите угол между прямыми BC и AD .

3°

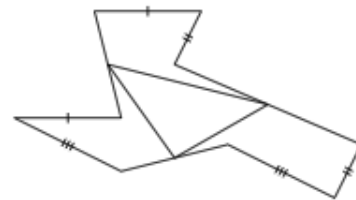
7. («Ломоносов», 2015, 8–9) В треугольнике ABC , основание AB которого лежит на оси абсцисс, проведены высоты AM , BN и CK . Найдите длину основания AB , если известны координаты точек $M(2, 2)$ и $N(4, 4)$.

4√5

8. («Ломоносов», 2013, 8–9) Дан параллелограмм $ABCD$ и выбраны точки A_1 , B_1 , C_1 и D_1 такие, что точка A является серединой отрезка DD_1 , точка B — серединой AA_1 , точка C — серединой BB_1 и точка D — серединой CC_1 . Найдите площадь четырёхугольника $A_1B_1C_1D_1$, если известно, что $S(ABCD) = 1$.

5

9. («Ломоносов», 2019, 9) Лёшин дачный участок имеет форму девятиугольника, у которого есть три пары равных и параллельных сторон (см. рисунок). Лёша знает, что площадь треугольника с вершинами в серединах оставшихся сторон девятиугольника равна 12 соток. Помогите ему найти площадь всего дачного участка.



48 соток

10. («Ломоносов», 2019, 9) В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C точки P и Q — середины биссектрис, проведённых из вершин A и B . Вписанная в треугольник окружность касается гипотенузы в точке H . Найдите угол PHQ .

06

11. («Ломоносов», 2018, 9) Найдите площадь прямоугольного треугольника, если высота, проведённая из вершины прямого угла, разбивает его на два треугольника, у которых радиусы вписанных окружностей равны 3 и 4.

051

12. («Ломоносов», 2018, 9) Моль проела в ковре дырку в форме прямоугольника со сторонами 10 см и 4 см. Найдите наименьший размер квадратной заплатки, которой можно закрыть эту дырку (заплатка закрывает дырку, если все точки прямоугольника лежат внутри квадрата или на его границе).

Сторона равна $7\sqrt{2}$ см

13. («Ломоносов», 2017, 9) Из отрезков длин 3, 5, 7 и 9 составлен четырёхугольник, в который вписана окружность. К ней проведены две касательные: одна пересекает одну пару соседних сторон четырёхугольника, а другая — пару оставшихся. Найдите разность периметров треугольников, отсечённых от четырёхугольника этими касательными.

4 или 8

14. («Ломоносов», 2012, 9) Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Найдите величину угла ACB , если известно, что $\angle ACD = 72^\circ$ и $AB = BD$.

04

15. («Ломоносов», 2015, 9) В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ площади треугольников ABD и BCD равны, а площадь ACD равна половине площади ABD . Найдите длину отрезка CM , где M — середина стороны AB , если известно, что $AD = 12$.

18

16. («Ломоносов», 2013, 9) Две окружности радиусов R и R' касаются друг друга внешним образом в точке P и касаются прямой l в точках A и B соответственно. Пусть Q — точка пересечения прямой BP с первой окружностью. Определить, на каком расстоянии от прямой l расположена точка Q .

2R

17. («Ломоносов», 2011, 9) В равнобедренном треугольнике ABC провели биссектрису BP . Докажите, что если угол BAC равен 100° , то $AP + PB = BC$.

18. («Ломоносов», 2019, 10–11) На стороне AC треугольника ABC взяты точки E и K , причём точка E лежит между точками A и K и $AE : EK : KC = 3 : 5 : 4$. Медиана AD пересекает отрезки BE и BK в точках L и M соответственно. Найдите отношение площадей треугольников BLM и ABC .

$\frac{9}{1}$

19. («Ломоносов», 2019, 10–11) В треугольнике ABC на стороне BC отмечена такая точка D , что $BD : DC = 1 : 5$, а на стороне AC — точки E и K , причём точка E лежит между точками A и K . Отрезок AD пересекается с отрезками BE и BK в точках M и N соответственно, причём $BM : ME = 3 : 4$, $BN : NK = 2 : 3$. Найдите отношение $AM : ND$.

$\frac{64}{1201}$

20. («Ломоносов», 2019, 10–11) В треугольнике ABC на стороне AC отмечены такие точки E и K , что $AE = EK = KC$. На стороне BC взята такая точка D , что отрезок AD пересекает отрезки BE и BK в точках N и M соответственно, причём $AN : NM = 4 : 3$. Найдите отношение площади четырёхугольника $CKMD$ к площади треугольника ABC .

$\frac{9}{1}$

21. («Ломоносов», 2019, 10–11) В треугольнике ABC на стороне BC отмечена такая точка D , что $BD : DC = 1 : 3$, а на стороне AC — точки E и K , причём точка E лежит между точками A и K . Отрезок AD пересекается с отрезками BE и BK соответственно, причём $BM : ME = 7 : 5$, $BN : NK = 2 : 3$. Найдите отношение $MN : AD$.

$\frac{11}{45}$

22. («Ломоносов», 2018, 10–11) В треугольнике ABC , площадь которого равна 20, проведена медиана CD . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC , если известно, что $AC = \sqrt{41}$, а центр окружности, вписанной в треугольник ACD , лежит на окружности, описанной около треугольника BCD .

$\frac{8}{17}$ или $\frac{01}{17}$

23. («Ломоносов», 2017, 10–11) Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Касательные к этой окружности, проведённые в точках A и C , пересекаются на прямой BD . Найдите сторону AD , если $AB = 2$ и $BC : CD = 4 : 5$.

$\frac{2}{3}$

24. («Ломоносов», 2016, 10–11) В треугольнике ABC точки A_1 , B_1 , C_1 — середины сторон BC , AC и AB соответственно. Найдите длину стороны AC , если известно, что сумма векторов $3 \cdot \overrightarrow{AA_1} + 4 \cdot \overrightarrow{BB_1} + 5 \cdot \overrightarrow{CC_1}$ равна вектору с координатами $(2, 1)$.

$\frac{3}{5\sqrt{2}}$

25. («Ломоносов», 2015, 10–11) В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагонали AC и DB перпендикулярны сторонам DC и AB соответственно. Из точки B проведён перпендикуляр на сторону AD , пересекающий AC в точке O . Найдите AO , если $AB = 4$, $OC = 6$.

$\frac{2}{2}$

26. («Ломоносов», 2014, 10–11) Прямоугольник, отношение сторон которого равно 5, имеет наибольшую площадь среди всех прямоугольников, вершины которых лежат на сторонах данного ромба, а стороны параллельны диагоналям ромба. Найдите острый угол ромба.

$$\boxed{\frac{2}{5} \arctg \frac{5}{1} = \frac{5}{1} \arctg \frac{1}{5}}$$

27. («Ломоносов», 2013, 10–11) В трапеции $ABCD$, где $BC \parallel AD$, а диагонали пересекаются в точке O , на отрезке BC выбрана точка K так, что $BK : CK = 2 : 1$, а на отрезке AD выбрана точка M так, что $AM : MD = 1 : 2$. Найти площадь треугольника COD , если $AD = 5$, $BC = 2$, $KM = 7/3$, а $\cos \angle CAD = 1/3$.

$$\boxed{\frac{20\sqrt{2}}{27}}$$

28. («Ломоносов», 2012, 10–11) Точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Продолжение отрезка BO за точку O пересекает описанную вокруг треугольника ABC окружность в точке D . Найдите угол B , если $OD = 4AC$.

$$\boxed{\frac{8}{31} \arccos \left(-\frac{31}{28} \right)}$$

29. («Ломоносов», 2011, 10–11) Две окружности касаются друг друга внутренним образом в точке K . Хорда AB большей окружности касается меньшей окружности в точке L , делящей хорду в отношении $AL : BL = 2 : 3$. Найдите AK , если $BK = 12$.

$$\boxed{8}$$

30. («Ломоносов», 2010) На основании AC равнобедренного треугольника ABC взята точка E , а на боковых сторонах AB и BC точки D и F так, что $DE \parallel BC$ и $EF \parallel AB$. Какую часть площади треугольника ABC занимает площадь треугольника DEF , если $BF : EF = 2 : 3$?

$$\boxed{\frac{25}{9}}$$

31. («Ломоносов», 2010) Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 3$ и $BC = 1$ пересекаются в точке O . Две окружности, пересекающие основание BC в точках K и L соответственно, касаются друг друга в точке O , а прямой AD — в точках A и D соответственно. Найдите $AK^2 + DL^2$.

$$\boxed{21}$$

32. («Ломоносов», 2009) Две окружности касаются внешним образом: друг друга в точке A , а третьей окружности — в точках B и C . Продолжение хорды AB первой окружности пересекает вторую окружность в точке D , продолжение хорды AC пересекает первую окружность в точке E , а продолжения хорд BE и CD — третью окружность в точках F и G соответственно. Найдите BG , если $BC = 5$ и $BF = 12$.

$$\boxed{13}$$

33. («Ломоносов», 2008) Найдите радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника с основанием 6, если синус одного его угла равен косинусу другого.

$$\boxed{\frac{3}{2} \sqrt{3} \text{ или } \frac{3}{2}}$$

34. («Ломоносов», 2007) На стороне AB треугольника ABC взята такая точка D , что окружность, проходящая через точки A , C и D , касается прямой BC . Найдите AD , если $AC = 9$, $BC = 12$ и $CD = 6$.

$$\boxed{10}$$

35. («Ломоносов», 2006) Точки A , B и C лежат на одной прямой. Отрезок AB является диаметром первой окружности, а отрезок BC — диаметром второй окружности. Прямая, проходящая через точку A , пересекает первую окружность в точке D и касается второй окружности в точке E , при этом $BD = 9$ и $BE = 12$. Найдите радиусы окружностей.

98 и 8

36. («Ломоносов», 2005) Найдите площадь трапеции $ABCD$ с боковой стороной $BC = 5$, если расстояния от вершин A и D до прямой BC равны 3 и 7 соответственно.

25

37. («Ломоносов», 2005) На окружности взята точка A , на её диаметре BC — точки D и E , а на его продолжении за точку B — точка F . Найдите BC , если $\angle BAD = \angle ACD$, $\angle BAF = \angle CAE$, $BD = 2$, $BE = 5$ и $BF = 4$.

11