Планиметрия на олимпиаде «Физтех»

1. (*«Физтех», 2019, 9*) В прямоугольный треугольник ABC ($\angle B = 90^\circ$) вписана окружность Γ с центром I, которая касается сторон AB и BC в точках K и L соответственно. Прямая, проходящая через точку I, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите радиус окружности Γ, если $MK = 144$, $NL = 25$. Найдите AC, если дополнительно известно, что прямая MN параллельна AC.

$r = 60$, $AC = 390$

2. (*«Физтех», 2019, 9*) Хорды AB и CD окружности центром O имеют длину 10. Продолжения отрезков BA и CD соответственно за точки A и D пересекаются в точке P, причем $DP = 3$. Прямая PO пересекают отрезок AC в точке L. Найдите отношение $AL : LC$.

$AL : LC = 3 : 13$

3. (*«Физтех», 2019, 9*) Дана равнобокая трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AD > BC$). Окружность Ω вписана в угол BAD, касается отрезка BC в точке C и повторно пересекает CD в точке E, так что $CE = 9$, $ED = 16$. Найдите радиус окружности Ω и площадь трапеции $ABCD$.

$R = \frac{15}{2}$, $S_{ABCD} = \frac{675}{2}$

4. (*«Физтех», 2019, 9*) В окружность Ω радиуса 10 вписаны трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$) и прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$ таким образом, что $AC \parallel B_1D_1$, $BD \parallel A_1C_1$. Найдите отношение площадей $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, если известно, что $AD = 16$, $BC = 12$.

$\frac{49}{50}$ или $\frac{1}{2}$

5. (*«Физтех», 2019, 10*) Дана равнобокая трапеция $ABCD$, ($AD \parallel BC$, $AD > BC$). Окружность Ω вписана в угол BAD, касается отрезка BC в точке C и повторно пересекает CD в точке E так, что $CE = 9$, $ED = 7$. Найдите радиус окружности Ω и площадь трапеции $ABCD$.

$R = 6$, $S_{ABCD} = 96 + 24\sqrt{7}$

6. (*«Физтех», 2019, 10*) В окружность Ω радиуса 13 вписаны трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$) и прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$ таким образом, что $AC \perp B_1D_1$, $BD \perp A_1C_1$. Найдите отношение площади $ABCD$ к площади $A_1B_1C_1D_1$, если известно, что $AD = 10$, $BC = 24$.

$\frac{289}{338}$ или $\frac{1}{2}$

7. (*«Физтех», 2019, 10*) Окружности ω и Ω касаются внешним образом в точке F, а их общая внешняя касательная касается окружностей ω и Ω соответственно в точках A и B. Прямая ℓ проходит через точку B, вторично пересекает окружность Ω в точке C, а также пересекает ω в точках D и E (точка D расположена между C и E). Общая касательная окружностей, проходящая через точку F, пересекает прямые AB и BE в точках P и H соответственно (точка H лежит между точками P и F). Известно, что $BC = 60$, $DH = HC = 2$. Найдите длину отрезка HP и радиусы обеих окружностей.

$HP = 8\sqrt{31}$, $r = 6\sqrt{\frac{93}{5}}$, $R = 2\sqrt{465}$

8. (*«Физтех», 2019, 10*) Хорды AB и CD окружности Γ с центром O имеют длину 4. Продолжения отрезков BA и CD соответственно за точки A и D пересекаются в точке P. Прямая PO пересекает отрезок AC в точке L, причём $AL : LC = 1 : 4$.

а) Найдите AP.

б) Пусть дополнительно известно, что радиус окружности Γ равен 3, а точка T — центр окружности, вписанной в треугольник ACP. Найдите длину отрезка PT и площадь треугольника ACP.

$\boxed{AP = \frac{4}{3},\ PT = \frac{\sqrt{145}}{3} - 3,\ S_{\triangle APC} = \frac{128\sqrt{5}}{87}}$

9. (*«Физтех», 2019, 11*) Окружности Ω и ω касаются внешним образом в точке F, а их общая внешняя касательная касается окружностей Ω и ω соответственно в точках A и B. Прямая ℓ проходит через точку B, вторично пересекает окружность ω в точке C, а также пересекает Ω в точках D и E (точка D расположена между C и E). Общая касательная окружностей, проходящая через точку F, пересекает прямые AB и BE в точках P и H соответственно (точка F лежит между точками P и H). Известно, что $BC = 42$, $DH = HC = 4$. Найдите длине отрезка HP и радиусы обеих окружностей.

$\boxed{HP = 7\sqrt{46},\ r = 5\sqrt{\frac{138}{7}},\ R = 5\sqrt{\frac{322}{3}}}$

10. (*«Физтех», 2019, 11*) Хорды AB и CD окружности Γ с центром O имеют длину 4. Продолжения отрезков BA и CD соответственно за точки A и D пересекаются в точке P. Прямая PO пересекает отрезок AC в точке L, причём $AL : LC = 2 : 3$.

а) Найдите AP.

б) Пусть дополнительно известно, что радиус окружности Γ равен 2,5, а точка T — центр окружности, вписанной в треугольник ACP. Найдите длину отрезка PT и площадь треугольника ACP.

$\boxed{\text{а) } AP = 8;\ \text{б) } PT = \frac{\sqrt{409}-5}{2},\ S_{\triangle APC} = \frac{5760}{409}}$

11. (*«Физтех», 2016, 9*) Точка A лежит на стороне LM треугольника KLM с углом 120° при вершине K. В треугольники AKL и AKM вписаны окружности с центрами F и O соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника FKO, если $AO = 2$, $AF = 7$.

$\boxed{\sqrt{\frac{53}{3}}}$

12. (*«Физтех», 2016, 9*) Окружность проходит через вершины K и P треугольника KPM и пересекает его стороны KM и PM в точках F и B соответственно, причём $KF : FM = 3 : 1$, $PB : BM = 6 : 5$. Найдите KP, если $BF = \sqrt{15}$.

$\boxed{2\sqrt{33}}$

13. (*«Физтех», 2016, 9*) Окружность проходит через вершины Q и E треугольника MQE и пересекает его стороны MQ и ME соответственно в точках B и D, отличных от вершин треугольника. Отношение площади треугольника BDM к площади треугольника MQE равно $9/121$.

а) Найдите отношение $QE : BD$.

б) Пусть дополнительно известно, что отношение площадей треугольников BME и DQM равно 4. Найдите отношение $BQ : DE$.

$\boxed{\text{а) } 11 : 3\text{; б) } 5 : 19}$

14. (*«Физтех», 2017, 9*) В треугольник ABC вписаны два равных прямоугольника $PQRS$ и $P_1Q_1R_1S_1$ (при этом точки P и P_1 лежат на стороне AB, точки Q и Q_1 лежат на стороне BC, а точки R, S, R_1 и S_1 — на стороне AC). Известно, что $PS = 12$, $P_1S_1 = 3$. Найдите площадь треугольника ABC.

$\boxed{\frac{225}{2}}$

15. (*«Физтех», 2017, 9–10*) Продолжение высоты BH треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке D (точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC). Градусные меры дуг AD и CD, не содержащих точки B, равны $60°$ и $90°$ соответственно. Определите, в каком отношении отрезок BD делится стороной AC.

$\boxed{\sqrt{3} : 1}$

16. (*«Физтех», 2017, 9–10*) В треугольнике ABC проведена медиана BM; MD и ME — биссектрисы треугольников AMB и CMB соответственно. Отрезки BM и DE пересекаются в точке P, причём $BP = 2$, $MP = 4$.

а) Найдите отрезок DE.

б) Пусть дополнительно известно, что около четырёхугольника $ADEC$ можно описать окружность. Найдите её радиус.

$\boxed{\text{а) } 8\text{; б) } 2\sqrt{85}}$

17. (*«Физтех», 2017, 9–10*) В треугольнике ABC известно, что $AB = 3$, $AC = 4$, $\angle BAC = 60°$. Продолжение биссектрисы AA_1 пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке A_2. Найдите площади треугольников OA_2C и A_1A_2C (O — центр окружности, описанной около треугольника ABC).

$\boxed{\frac{13\sqrt{3}}{12} \text{ и } \frac{13\sqrt{3}}{21}}$

18. (*«Физтех», 2018, 9*) На продолжении стороны AC треугольника ABC за точку A отмечена точка T такая, что $\angle BAC = 2\angle BTC$. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $AB = AC$, $BT = 70$, $AT = 37$.

$\boxed{420}$

19. (*«Физтех», 2018, 9*) Окружность с центром O, вписанная в треугольник PQR, касается его сторон PQ, QR и RP в точках C, A и B соответственно. Прямые BO и CO пересекают стороны PQ и PR в точках K и L соответственно. Найдите отношение $QA : AR$, если $KQ = 3$, $QR = 16$, $LR = 1$.

$\boxed{9 : 7}$

20. (*«Физтех», 2018, 9*) Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Пусть P — центр окружности, вписанной в треугольник ABD, а Q — центр окружности, вписанной в треугольник CBD. Луч BP пересекает сторону DA в точке M, а луч DQ пересекает сторону BC в точке N. Оказалось, что $AM = \frac{9}{7}$, $DM = \frac{12}{7}$ и $BN = \frac{20}{9}$, $CN = \frac{25}{9}$.

а) Найдите отношение $AB : CD$.

б) Пусть дополнительно известно, что данные в условии окружности касаются. Найдите длины сторон AB и CD.

а) $3 : 5$; б) $AB = 3$, $CD = 5$

21. (*«Физтех», 2018, 9*) В окружность вписан четырёхугольник $KLMN$ с диагоналями KM и LN, которые пересекаются в точке T. Основания перпендикуляров, опущенных из точки T на стороны четырёхугольника, лежат на этих сторонах. Расстояния от точки T до сторон KL, LM, MN, NK равны $4\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\frac{8}{\sqrt{17}}$ и $\frac{8}{\sqrt{17}}$ соответственно.

а) Найдите отношение $KT : TM$.

б) Найдите длину диагонали LN, если дополнительно известно, что $KM = 10$.

а) $4 : 1$; б) $\frac{50}{\sqrt{34}}$

22. (*«Физтех», 2018, 10*) В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ проведена диагональ BD, и в каждый из полученных треугольников ABD и BCD вписана окружность. Прямая, проходящая через вершину B и центр одной из окружностей, пересекает сторону DA в точке M. При этом $AM = \frac{8}{5}$ и $MD = \frac{12}{5}$. Аналогично, прямая, проходящая через вершину D и центр второй окружности, пересекает сторону BC в точке N. При этом $BN = \frac{30}{11}$ и $NC = \frac{25}{11}$.

а) Найдите отношение $AB : CD$.

б) Найдите длины сторон AB и CD, если дополнительно известно, что данные окружности касаются друг друга.

а) $4 : 5$; б) $AB = 4$, $CD = 5$

23. (*«Физтех», 2018, 10*) В треугольнике ABC сторона AC равна 6, а угол ACB равен $120°$. Окружность Ω радиуса $\sqrt{3}$ касается сторон BC и AC треугольника ABC в точках K и L соответственно и пересекает сторону AB в точках M и N (M лежит между A и N) так, что отрезок MK параллелен AC. Найдите длины отрезков CL, MK, AB и площадь треугольника ANL.

$CL = 1$, $MK = 3$, $AB = 3\sqrt{13}$, $S_{ANL} = \frac{125\sqrt{3}}{52}$

24. (*«Физтех», 2018, 10*) Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке P. Известно, что расстояния от точки P до сторон AB, BC, CD, DA равны 4, $\sqrt{3}$, $\frac{8}{\sqrt{19}}$ и $8\sqrt{\frac{3}{19}}$ соответственно (основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны, лежат на этих сторонах).

а) Найдите отношение $AP : PC$.

б) Найдите длину диагонали BD, если дополнительно известно, что $AC = 10$.

а) $4 : 1$; б) $\frac{35}{\sqrt{19}}$

25. (*«Физтех», 2018, 10*) Дан параллелограмм $ABCD$. Окружность Ω с диаметром 13 описана вокруг треугольника ABM, где M — точка пересечения диагоналей данного параллелограмма. Ω вторично пересекает луч CB и отрезок AD в точках E и K соответственно. Длина дуги AE в два раза больше длины дуги BM (дуги AE и BM не имеют общих точек). Длина отрезка EM равна 12. Найдите длины отрезков BC, BK и периметр треугольника AKM.

$BC = 13$, $BK = \frac{120}{13}$, $P_{AKM} = \frac{340}{13}$

26. (*«Физтех», 2018, 11*) Окружность Ω радиуса $\sqrt{3}$ касается сторон BC и AC треугольника ABC в точках K и L соответственно и пересекает сторону AB в точках M и N (M лежит между A и N) так, что отрезок MK параллелен AC, $KC = 1$, $AL = 6$. Найдите $\angle ACB$, длины отрезков MK, AB и площадь треугольника CMN.

$\angle ACB = 120°$, $MK = 3$, $AB = \frac{7\sqrt{21}}{4}$, $S_{CMN} = \frac{5\sqrt{3}}{4}$

27. (*«Физтех», 2018, 11*) Дан параллелограмм $ABCD$. Окружность Ω с диаметром 5 описана вокруг треугольника ABM, где M — точка пересечения диагоналей данного параллелограмма. Ω вторично пересекает луч CB и отрезок AD в точках E и K соответственно. Длина дуги AE в два раза больше длины дуги BM (дуги AE и BM не имеют общих точек). Длина отрезка MK равна 3. Найдите длины отрезков BC, BK и периметр треугольника EBM.

$BC = 5$, $BK = \frac{24}{5}$, $P_{EBM} = \frac{42}{5}$

28. (*«Физтех», 2017, 10–11*) Лучи AB и DC пересекаются в точке P, а лучи BC и AD пересекаются в точке Q. Известно, что треугольники ADP и QAB подобны (*вершины не обязательно указаны в соответствующем порядке*), а четырёхугольник $ABCD$ можно вписать в окружность радиуса 7.

а) Найдите AC.

б) Пусть дополнительно известно, что окружности, вписанные в треугольники ABC и ACD, касаются отрезка AC в точках K и T соответственно, причём $CK : KT : TA = 6 : 1 : 7$ (точка T лежит между K и A). Найдите $\angle DAC$ и площадь четырёхугольника $ABCD$.

а) 14; б) 45° и 97

29. (*«Физтех», 2017, 11*) В треугольнике ABC угол при вершине A в два раза больше угла при вершине C. Через вершину B проведена касательная ℓ к окружности Ω, описанной около треугольника ABC. Расстояния от точек A и C до этой касательной равны соответственно 4 и 9.

а) Найдите расстояние от точки A до прямой BC.

б) Найдите радиус окружности Ω и длину стороны AB.

а) 5; б) $\frac{32}{7}$ и $\frac{16}{\sqrt{7}}$

30. (*«Физтех», 2016, 10*) Вокруг равнобедренного остроугольного треугольника NPQ с основанием NQ описана окружность Ω. Точка F — середина дуги PN, не содержащей точки Q. Известно, что расстояния от точки F до прямых PN и QN равны соответственно 5 и 20/3. Найдите радиус окружности Ω и площадь треугольника NPQ.

6; $\frac{35\sqrt{35}}{9}$

31. (*«Физтех», 2016, 10*) Вокруг равнобедренного остроугольного треугольника NPQ с основанием NQ описана окружность Ω. Расстояние от середины дуги PN, не содержащей точки Q, до стороны PN равно 4, а расстояние от середины дуги QN, не содержащей точки P, до стороны QN равно 0,4. Найдите радиус окружности Ω и площадь треугольника NPQ.

5; $\frac{192\sqrt{6}}{25}$

32. (*«Физтех», 2016, 10*) Равнобедренный треугольник PQT с основанием PQ вписан в окружность Ω. Хорды AB и CD, параллельные прямой PQ, пересекают сторону QT в точках L и M соответственно, и при этом $QL = LM = MT$. Найдите радиус окружности Ω и площадь треугольника PQT, если $AB = 2\sqrt{14}$, $CD = 2\sqrt{11}$, а центр O окружности Ω расположен между прямыми AB и CD.

$\frac{15}{4}$; 18

33. (*«Физтех», 2016, 11*) Точки A, B, C, D, E последовательно расположены на прямой, причём $AB = BC = DE = 2$, $CD = 1$. Окружности Ω и ω, касающиеся друг друга, таковы, что Ω проходит через точки D и E, а ω проходит через точки B и C. Найдите радиусы окружностей Ω и ω, если известно, что их центры и точка A лежат на одной прямой.

$R = \frac{\sqrt{19}}{8}$, $r = \frac{2\sqrt{19}}{11}$

34. (*«Физтех», 2016, 11*) Окружность ω радиуса 4 с центром O вписана в остроугольный треугольник EFQ и касается его сторон FQ и EQ в точках M и P соответственно. Окружность Ω радиуса $\sqrt{65}/2$ с центром T описана около треугольника PQM.

а) Найдите OQ.

б) Пусть дополнительно известно, что отношение площади треугольника FTE к площади треугольника EFQ равно $2/3$. Найдите длину биссектрисы QA треугольника EFQ, а также его площадь.

а) $\sqrt{65}$; б) $QA = \frac{3\sqrt{65}}{2}$, $S = 84$

35. (*«Физтех», 2016, 11*) В треугольнике ABC медианы BD и CE пересекаются в точке M. Окружность, построенная на отрезке BM как на диаметре, проходит через вершину C и касается прямой DE. Известно, что $CM = 4$. Найдите высоту AH треугольника ABC, угол CBD и площадь треугольника ABC.

12; 30°; $24\sqrt{3}$

36. (*«Физтех», 2015, 10–11*) На стороне BC треугольника ABC взята точка M такая, что $BM : MC = 2 : 5$. Биссектриса BL данного треугольника и отрезок AM пересекаются в точке P под углом 90°.

а) Найдите отношение площади треугольника ABP к площади четырёхугольника $LPMC$.

б) На отрезке MC отмечена точка F такая, что $MF : FC = 1 : 4$. Пусть дополнительно известно, что прямые LF и BC перпендикулярны. Найдите угол CBL.

а) $9 : 40$; б) $\arccos \frac{3\sqrt{21}}{14}$

37. (*«Физтех», 2015, 10–11*) Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Две окружности Ω_1 и Ω_2 равных радиусов с центрами O_1 и O_2 вписаны в углы BAD и BCD соответственно, при этом первая касается стороны AD в точке K, а вторая касается стороны BC в точке T.

а) Найдите радиус окружности Ω_1, если $AK = 2$, $CT = 8$.

б) Пусть дополнительно известно, что точка O_2 является центром окружности, описанной около треугольника BOC. Найдите угол BDC.

а) 4; б) $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ или $\pi - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

38. (*«Физтех», 2015, 10–11*) В углы A и B треугольника ABC вписаны соответственно окружности с центрами O_1 и O_2 равного радиуса, точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Данные окружности касаются стороны AB в точках K_1, K_2 и K соответственно, при этом $AK_1 = 4$, $BK_2 = 6$ и $AB = 16$.

а) Найдите длину отрезка AK.

б) Пусть окружность с центром O_1 касается стороны AC в точке K_3. Найдите угол CAB, если известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника OK_1K_3.

а) $\frac{32}{5}$; б) $2\arcsin\frac{3}{5} = \arccos\frac{7}{25}$

39. (*«Физтех», 2014*) Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD. Окружность ω радиуса 2, центр O которой лежит на диагонали BD, касается отрезков BC, CD и AD в точках M, N и K соответственно. Известно, что $BM = 3$, а четырёхугольник $KOBA$ вписан в окружность Ω. Найдите угол COD, площадь трапеции $ABCD$ и радиус окружности Ω.

90°, 26, $\frac{5\sqrt{13}}{6}$

40. (*«Физтех», 2014*) Четырёхугольник $ABKD$ вписан в окружность Ω радиуса $\sqrt{17}$. На стороне KD выбрана точка C так, что $\angle BCD = 90^\circ$. Окружность ω радиуса 4, описанная вокруг треугольника BCK, касается отрезка AD и прямой AB. Найдите длину отрезка AB, угол BAD и площадь четырёхугольника $ABCD$.

2, $2\,\mathrm{arctg}\,2 = \pi - \arccos\frac{3}{5}$, $\frac{232}{25}$

41. (*«Физтех», 2013*) В параллелограмме $ABCD$ угол ADC равен $\arcsin\frac{\sqrt{24}}{5}$. Окружность Ω, проходящая через точки A, C и D, пересекает стороны AB и BC в точках N и L соответственно, причём $AN = 11$, $BL = 6$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$ и радиус окружности Ω.

$S = 60\sqrt{6}$, $R = \frac{5\sqrt{265}}{4\sqrt{6}}$

42. (*«Физтех», 2013*) Дана прямоугольная трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD, причём $BC < AD$, $\angle BCD = 90^\circ$. Точка M — середина отрезка CD. Известно, что окружность радиуса 5 проходит через точки A и B и касается стороны CD в точке M, а $\cos\angle BMC = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Найдите длины отрезков AB и BC, а также площадь трапеции.

$AB = 10$, $BC = \frac{10}{9}$, $S = \frac{200\sqrt{2}}{9}$

43. (*«Физтех», 2012*) Две окружности разных радиусов касаются внешним образом. К ним проведены две общие внешние касательные AC и BD. Их точки касания с меньшей окружностью — A и B, с большей окружностью — C и D. Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AB = 24/5$, $AC = 12$.

3 и 12

44. (*«Физтех», 2012*) В трапеции $ABCD$ основание BC равно 5, боковая сторона AB равна 10. Биссектиса угла BAD пересекает сторону CD в точке E, а прямую BC — в точке F, причём $AE \perp CD$, $EF = 4$. Найдите длины отрезков AE и AD, а также площадь трапеции.

$AE = 12$, $AD = 15$, $S = 96$

45. (*«Физтех», 2011*) В параллелограмме $ABCD$ окружность радиуса $1/4$ с центром на отрезке CD проходит через точку D и касается отрезка BC в точке E такой, что угол BED равен $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$. Найдите высоту параллелограмма DF, проведённую к стороне BC, и длину отрезка CD. Найдите площадь параллелограмма, если $AB = BE$.

$DF = 8/25$, $CD = 8/7$, $S = 16/25$

46. (*«Физтех», 2011*) В треугольнике ABC окружность радиуса $\frac{13}{3}$ с центром на отрезке BC проходит через точку B и касается отрезка AC в точке D такой, что угол ADB равен $\operatorname{arctg}\frac{3}{2}$. Найдите высоту BF треугольника ABC и длину отрезка CD. Найдите площадь треугольника ABC, если длины отрезков AB и CD равны.

$BF = 6$, $CD = \frac{52}{5}$, $S = \frac{6}{5}\left(36 + \sqrt{451}\right)$

47. (*«Физтех», 2010*) В равнобедренном треугольнике ABC основание AC равно 1, угол ABC равен $2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. Точка D лежит на стороне BC так, что площадь треугольника ABC вчетверо больше площади треугольника ADC. Найдите расстояние от точки D до прямой AB и радиус окружности, описанной около треугольника ADC.

$\frac{3}{2\sqrt{5}}$, $\frac{\sqrt{265}}{32}$

48. (*«Физтех», 2010*) В трапецию $ABCD$ можно вписать окружность. Длины её боковых сторон AB и CD равны соответственно 3 и 5, а длина основания AD больше длины BC. Средняя линия трапеции делит её на две части, отношение площадей которых равно $5/11$. Найдите радиус вписанной в трапецию окружности и длины её диагоналей.

$R = \frac{\sqrt{14}}{3}$, $AC = 2\sqrt{\frac{10}{3}}$, $BD = 2\sqrt{\frac{26}{3}}$

49. (*«Физтех», 2009*) Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке O, а их длины равны соответственно 30, 24 и 18. Найдите площади треугольников ABC и OA_1C, а также радиус окружности, описанной около треугольника OA_1C.

288, 48, $\frac{25}{4}$

50. (*«Физтех», 2009*) В треугольнике ABC точка D лежит на стороне AC, а точка E лежит на отрезке AD. Известно, что углы ABE, DBE и CBD равны, а длина отрезка DE вдвое меньше длины отрезка CD и втрое меньше длины отрезка AE. Найдите углы ABE и ACB.

$\angle ABE = 45^\circ$, $\angle ACB = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$

51. (*«Физтех», 2008*) В треугольнике ABC медиана BM равна 2, угол ABM равен $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$, угол CBM равен $\operatorname{arctg}\frac{1}{5}$. Найти стороны AB, BC и биссектрису BE треугольника ABC.

$AB = \frac{4}{\sqrt{13}}$, $BC = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$, $BE = \frac{8\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{\sqrt{13}(1+2\sqrt{2})}$

52. (*«Физтех», 2007*) Окружность ω с центром O на стороне AC треугольника ABC касается сторон AB и BC в точках D и E соответственно. Известно, что $AD = 2CE$, а угол DOE равен $\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}$. Найти углы треугольника ABC и отношение его площади к площади круга, ограниченного окружностью ω.

$\angle ABC = \pi - \operatorname{arcctg}\frac{1}{3}$, $\angle ACB = \frac{\pi}{4}$, $\angle BAC = \operatorname{arcctg} 2$; $\frac{2\sqrt{10}+7}{6\pi}$