

Плоские множества

1. (Всеросс., 2015, ШЭ, 9) Постройте график уравнения

$$x^2 - y^4 = \sqrt{18x - x^2 - 81},$$

то есть изобразите на координатной плоскости все точки, координаты (x, y) которых удовлетворяют этому уравнению.

Пара точек

2. («Физтех», 2016, 9) Изобразите на плоскости (x, y) множество точек, координаты которых удовлетворяют системе

$$\begin{cases} (|x| + x)^2 + (|y| - y)^2 \leq 16, \\ y - 3x \leq 0, \end{cases}$$

и найдите площадь полученной фигуры.

$\pi + \frac{8}{9}$

3. («Физтех», 2019, 9) На координатной плоскости рассматривается фигура M , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} |y| + |4 + y| \leq 4, \\ \frac{x - y^2 - 4y - 3}{2y - x + 3} \geq 0. \end{cases}$$

Изобразите фигуру M и найдите ее площадь.

8

4. («Физтех», 2019, 9) На координатной плоскости рассматривается фигура M , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x - y \geq |x + y|, \\ \frac{x^2 - 6x + y^2 - 8y}{3y - x + 6} \geq 0. \end{cases}$$

Изобразите фигуру M и найдите ее площадь.

8

5. («Физтех», 2019, 10) На координатной плоскости рассматривается фигура M , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} |x - 1| + |5 - x| \leq 4, \\ \frac{x^2 - 6x + 2y + 7}{y + x - 4} \leq 0. \end{cases}$$

Изобразите фигуру M и найдите её площадь.

7

6. («Физтех», 2019, 10) На координатной плоскости рассматривается фигура M , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y - x \geq |x + y|, \\ \frac{x^2 + 8x + y^2 + 6y}{2y - x - 8} \leq 0. \end{cases}$$

Изобразите фигуру M и найдите её площадь.

8

7. (МГУ, ДВИ, 2012.5) Найдите площадь фигуры, состоящей из точек (x, y) координатной плоскости, удовлетворяющих уравнению

$$|x| + |x + 3y| + 3|y - 2| = 6.$$

9

8. («Физтех», 2016, 9–10) Изобразите на плоскости (x, y) множество точек, удовлетворяющих уравнению

$$|5x| + |12y| + |60 - 5x - 12y| = 60,$$

и найдите площадь полученной фигуры.

30

9. («Физтех», 2016, 10) Изобразите на плоскости (x, y) множество точек, удовлетворяющих уравнению

$$|16 + 6x - x^2 - y^2| + |6x| = 16 + 12x - x^2 - y^2,$$

и найдите площадь полученной фигуры.

$\frac{5}{4} \arcsin 25\pi - 25$

10. («Ломоносов», 2011, 10–11) Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} \sqrt{1-x} + 2x \geq 0, \\ -1 - x^2 \leq y \leq 2 + \sqrt{x}. \end{cases}$$

4

11. (МГУ, мехмат, 2003-03.4) Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} |y + \log_2 x| + |y + 1 - 2^{x-1}| = |2y - 2^{x-1} + 1 + \log_2 x|, \\ |x| + |y + 1| + |y - 1| = x + 2. \end{cases}$$

□

12. («Физтех», 2017, 10) а) Изобразите на координатной плоскости фигуру Φ , координаты точек которой удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 - y^2 \leq 2(x - y), \\ x^2 + y^2 \leq 4(x + y - 1). \end{cases}$$

б) Найдите площадь фигуры Φ и расстояние от точки $T(0, 4)$ до ближайшей точки фигуры Φ .

□

13. («Физтех», 2017, 10) Изобразите на плоскости фигуру Φ , состоящую из точек (x, y) координатной плоскости таких, что выполнена система неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 3y^2 + 4x + 4} \leq 2x + 1, \\ x^2 + y^2 \leq 4. \end{cases}$$

Определите, из скольких частей состоит фигура Φ .

14. («Высшая проба», 2014, 10–11) На координатной плоскости нарисовано множество точек, заданное уравнением $x = y^2$. Окружность радиуса 5 с центром в точке $(11, 1)$ пересекает это множество в точках A, B, C и D . Докажите, что все точки A, B, C, D лежат на одной параболе, т. е. на кривой, задаваемой уравнением $y = ax^2 + bx + c$, и найдите уравнение этой параболы.

□

15. («Высшая проба», 2017, 10) Парабола $x = y^2$ пересекается с некоторой окружностью в четырёх точках. Докажите, что эти четыре точки лежат на некоторой параболе, задаваемой уравнением $y = ax^2 + bx + c$, или на паре параллельных прямых.

16. (ОММО, 2009) Пусть x и y удовлетворяют системе

$$\begin{cases} y - x \leq 5, \\ y + 4x \leq -5, \\ 3y + 2x \geq -5. \end{cases}$$

Найдите все значения, которые может принимать функция $x^2 + y^2$.

□

17. («Покори Воробьёвы горы!», 2011, 10–11) Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством

$$||x| - 6| + ||y| - 7| \leq 10.$$

□

18. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) Найдите все значения y , при каждом из которых ни одно значение x , удовлетворяющее неравенству

$$\log_2 (|x| + |y|) \leq 2,$$

не удовлетворяет неравенству

$$\log_{\frac{1}{2}} (|x| + |y + 4|) \geq -2.$$

$$(\infty+; 0] \cap [7-; \infty-)$$

19. (ОММО, 2011) Плоская фигура W представляет собой множество всех точек, координаты которых (x, y) удовлетворяют неравенству

$$(|x| + |4 - |y|| - 4)^2 \leq 4.$$

Нарисуйте фигуру W и найдите её площадь.

$$021$$

20. («Ломоносов», 2007) Определите, под каким углом видно из начала координат (т. е. внутри какого наименьшего угла с вершиной в точке $(0, 0)$ помещается) множество, заданное на координатной плоскости неравенством

$$14x^2 + xy + y^2 + 14x + 2y + 4 < 0.$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \text{ град}$$

21. («Высшая проба», 2012, 10) Сколько точек, обе координаты которых натуральны, лежит строго внутри области, ограниченной графиком функции $y = -x^3 + 30x^2 - 300,6x + 2012$ и осями координат?

$$80161$$

22. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11) Гипербола $y = 5/x$ пересекается с прямой $2x + y = 12$ в точках A и B , а с прямой $x + 2y = 8$ — в точках C и D . Найдите координаты точки, равноудалённой от точек A , B и C .

$$(8; 2)$$

23. («Покори Воробьёвы горы!», 2019, 10–11) Кривая на координатной плоскости задана уравнением

$$(|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = \left(2 - \frac{|x|}{x}\right)^2.$$

Среди всех прямых, касающихся этой кривой в двух точках, найдите ту прямую, которая наименее удалена от точки с координатами $(10 - 4\sqrt{6}; 6)$.

$$4 + \frac{9\sqrt{2}}{01-x} = 6$$