

Симметрия в задачах с параметрами

Симметрия — одно из ключевых понятий математики и физики. Вы знакомы с геометрической симметрией фигур и вообще различных объектов природы. Однако математические представления о симметрии распространяются гораздо шире: оказывается, например, что можно говорить о симметрии некоторых уравнений. Так, уравнения, выражающие фундаментальные физические законы, обладают определённой симметрией; это свидетельствует о том, что симметрия принадлежит к числу наиболее глубоких свойств нашего мира.

Что же такое симметрия уравнений? Мы не будем сейчас стремиться к строгим определениям и ограничимся следующим описанием. *Если при некотором преобразовании переменных уравнение не меняет своего вида («переходит само в себя»), то мы говорим, что это уравнение симметрично относительно данного преобразования¹.*

Почему бывает важно замечать симметрию уравнений? Дело в том, что если уравнение обладает некоторой симметрией, то такой же симметрией обладают и все его решения. Значит, *не решая уравнение и исходя лишь из соображений симметрии, мы можем заранее предвидеть некоторые свойства его решений!*

Допустим, например, что требуется найти такие значения параметра, при которых уравнение имеет заданное число решений. Тогда, заметив симметрию данного уравнения, мы сможем получить необходимые условия на параметр, и останется лишь проверить, какие из найденных условий являются достаточными.

Задача 1. (МГУ, мехмат, 1990) Найдите все значения параметра b , при которых уравнение

$$b^2 x^2 - b \operatorname{tg}(\cos x) + 1 = 0 \quad (1)$$

имеет единственное решение.

Решение. Обратите внимание, что уравнение (1) не меняет своего вида при замене x на $-x$ (ведь x^2 и $\cos x$ — чётные функции). Иными словами, уравнение (1) симметрично относительно преобразования $x \mapsto -x$ (то есть относительно отражения в начале координат).

Следовательно, данной симметрией будут обладать и решения нашего уравнения. Именно, если x_0 — корень уравнения (1), то и число $-x_0$ будет его корнем; иначе говоря, решения уравнения (1) расположены симметрично относительно нуля. Вместе с тем, в задаче требуется, чтобы решение было только одно.

Единственная возможность — корнем уравнения (1) является нуль, и только он. В самом деле, если уравнение имеет ненулевое решение, то всего решений будет как минимум два. Подставляя $x = 0$ в уравнение (1), получим

$$-b \operatorname{tg} 1 + 1 = 0,$$

откуда

$$b = \operatorname{ctg} 1. \quad (2)$$

¹Мы сейчас не делаем различия между уравнениями и системами уравнений. Да его, в общем-то, и нет; например, система уравнений

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

равносильна уравнению $|f(x, y)| + |g(x, y)| = 0$. Поэтому, говоря о симметрии уравнений, мы имеем в виду также и симметрию систем уравнений.

Это — *необходимое* условие на b (только при таком b наше уравнение может иметь нулевое решение). Теперь вопрос в том, является ли это условие *достаточным*; то есть, окажется ли при $b = \operatorname{ctg} 1$ нулевое решение и в самом деле единственным, или же уравнение (1) будет иметь и другие корни помимо нуля.

Для выяснения достаточности условия (2) подставим данное значение b в уравнение (1):

$$\operatorname{ctg}^2 1 \cdot x^2 - \operatorname{ctg} 1 \cdot \operatorname{tg}(\cos x) + 1 = 0.$$

Перепишем это следующим образом:

$$\frac{\operatorname{tg}(\cos x)}{\operatorname{tg} 1} = 1 + \frac{x^2}{\operatorname{tg}^2 1}. \quad (3)$$

Тангенс является возрастающей функцией на интервале $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. Косинус, являющийся аргументом тангенса, принимает значения из отрезка $[-1; 1]$, а этот отрезок находится внутри интервала $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. Следовательно, справедливо неравенство $\operatorname{tg}(\cos x) \leq \operatorname{tg} 1$, то есть левая часть уравнения (3) не превосходит 1. В то же время правая часть (3) не меньше 1, и равенство возможно лишь в том случае, когда обе они равны 1, то есть при $x = 0$.

Итак, мы показали, что условие (2) является достаточным: при $b = \operatorname{ctg} 1$ уравнение (1) имеет единственное (нулевое) решение.

Ответ: $b = \operatorname{ctg} 1$.

Задача 2. (МГУ, химический ф-т, 2002) Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$9^{-x+1} \cdot 3^{x^2} + a^3 + 5a^2 + a + \sqrt{2} = \sin \frac{\pi x}{4} + \cos \frac{\pi x}{4} + 3$$

имеет единственное решение.

Решение. Обозначим $b = a^3 + 5a^2 + a$. Имеем:

$$9 \cdot 3^{x(x-2)} + b + \sqrt{2} = \sin \frac{\pi x}{4} + \cos \frac{\pi x}{4} + 3. \quad (4)$$

Оказывается, данное уравнение не меняет своего вида при замене x на $2 - x$ (это отражение в точке $x = 1$). В самом деле, посмотрим, как преобразуются выражения с переменной при преобразовании $x \mapsto 2 - x$:

$$\begin{aligned} x(x-2) &\mapsto (2-x)(2-x-2) = (x-2)x; \\ \sin \frac{\pi x}{4} + \cos \frac{\pi x}{4} &\mapsto \sin \frac{\pi(2-x)}{4} + \cos \frac{\pi(2-x)}{4} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{4} \right) + \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{4} \right) = \\ &= \cos \frac{\pi x}{4} + \sin \frac{\pi x}{4}. \end{aligned}$$

Итак, уравнение (4) симметрично относительно преобразования $x \mapsto 2 - x$. Следовательно, если x_0 — корень уравнения (4), то и $2 - x_0$ также будет его корнем. Поэтому единственным решением уравнения (4) может быть только неподвижная точка преобразования $x \mapsto 2 - x$:

$$x = 2 - x \quad \Rightarrow \quad x = 1.$$

Подставляя $x = 1$ в уравнение (4), получим:

$$3 + b + \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 3,$$

откуда $b = 0$. Это — необходимое условие единственности решения уравнения (4), и теперь надо выяснить, является ли оно достаточным.

Подставляем $b = 0$ в уравнение (4):

$$9 \cdot 3^{x(x-2)} + \sqrt{2} = \sin \frac{\pi x}{4} + \cos \frac{\pi x}{4} + 3,$$

или

$$3^{1+(x-1)^2} - 3 = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi x}{4} + \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{2}. \quad (5)$$

Левая часть уравнения (5) неотрицательна, а правая часть — неположительна. Поэтому равенство возможно лишь в том случае, когда обе части одновременно равны нулю, то есть при $x = 1$. Тем самым показано, что при $b = 0$ уравнение (4) в самом деле имеет единственное решение $x = 1$.

Остаётся найти соответствующие значения параметра a :

$$a^3 + 5a^2 + a = 0 \Leftrightarrow a(a^2 + 5a + 1) = 0 \Leftrightarrow a = 0, \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

Ответ: $a = 0, \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$.

Задача 3. Найти все значения a , при которых уравнение

$$x + \frac{1}{x} + \frac{a}{1 + \left| x - \frac{1}{x} \right|} = a^2 \quad (6)$$

имеет единственное решение.

Решение. Легко видеть, что уравнение (6) не меняет своего вида при преобразовании $x \mapsto \frac{1}{x}$ (такое преобразование называется инверсией). Следовательно, наряду с решением x_0 имеется также решение $\frac{1}{x_0}$, и поэтому единственным решением уравнения (6) может быть лишь неподвижная точка нашего преобразования:

$$x = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \pm 1.$$

Подставляя $x = -1$ в уравнение (6), получим $a^2 - a + 2 = 0$; тут корней нет. Подставляя $x = 1$ в уравнение (6), получим $a^2 - a - 2 = 0$, то есть $a = -1$ или $a = 2$. Это — необходимые условия на параметр a . Проверим, достаточны ли они.

Пусть $a = -1$. Тогда уравнение (6) примет вид:

$$x + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{1 + \left| x - \frac{1}{x} \right|}. \quad (7)$$

Если $x < 0$, то левая часть уравнения (7) отрицательна, а правая часть положительна, так что решений быть не может. Если же $x > 0$, то левая часть (7) не меньше 2 (как сумма двух взаимно обратных положительных чисел), а правая часть — не больше 2 (поскольку к единице прибавляется дробь, не превосходящая единицу). Следовательно, равенство (7) возможно лишь тогда, когда обе части одновременно равны 2, то есть при $x = 1$. Итак, $a = -1$ годится: в этом случае уравнение (6) действительно имеет единственное решение $x = 1$.

Пусть теперь $a = 2$. Уравнение (6) примет вид:

$$x + \frac{1}{x} + \frac{2}{1 + \left| x - \frac{1}{x} \right|} = 4. \quad (8)$$

Рассмотрим функцию в левой части уравнения (8):

$$f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{2}{1 + \left|x - \frac{1}{x}\right|}.$$

Мы видим, что $f(1) = 4$, и теперь нас интересует, является ли $x = 1$ единственным корнем уравнения $f(x) = 4$.

Нетрудно понять, что это не так. В самом деле, имеем $f(4) > 4$ и в то же время $f(2) = \frac{33}{10} < 4$. Функция f непрерывна при $x \neq 0$, и поэтому на интервале $(2; 4)$ найдётся значение x , при котором выполнено равенство $f(x) = 4$. Значит, условие $a = 2$ не является достаточным для единственности решения, и потому значение $a = 2$ не годится.

Ответ: $a = -1$.

Задача 4. (МГУ, химический ф-т, 2005) При каких значениях параметра a уравнение

$$|x| + \left| \frac{2x-1}{3x-2} \right| = a \quad (9)$$

имеет ровно три решения?

Решение. Оказывается, симметрией уравнения (9) служит преобразование

$$x \mapsto \frac{2x-1}{3x-2}. \quad (10)$$

В самом деле, при этом преобразовании первое слагаемое левой части уравнения переходит во второе, а второе слагаемое — в первое:

$$\frac{2x-1}{3x-2} \mapsto \frac{2\frac{2x-1}{3x-2}-1}{3\frac{2x-1}{3x-2}-2} = \frac{2(2x-1) - (3x-2)}{3(2x-1) - 2(3x-2)} = x.$$

Уравнение (9) при преобразовании (10) переходит само в себя, так что наряду с решением x_0 будет и решение $\frac{2x_0-1}{3x_0-2}$. Поэтому для того, чтобы решений было ровно три, необходимо, чтобы одним из решений была неподвижная точка нашего преобразования:

$$x = \frac{2x-1}{3x-2} \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ или } x = \frac{1}{3}.$$

Подставляя поочерёдно $x = 1$ и $x = \frac{1}{3}$ в уравнение (9), получаем соответственно $a = 2$ и $a = \frac{2}{3}$. Это — необходимые условия на параметр a . Теперь надо проверить их достаточность, то есть подставить полученные значения a в уравнение (9) и выяснить, действительно ли получается ровно три решения (а не какое-то другое нечётное число) в каждом из этих случаев.

Пусть $a = 2$. Уравнение (9) примет вид:

$$|x| + \left| \frac{2x-1}{3x-2} \right| = 2. \quad (11)$$

Решаем данное уравнение, снимая модули на промежутках $(-\infty; 0]$, $[0; \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}; \frac{2}{3}]$ и $(\frac{2}{3}; +\infty)$.

1. $x > \frac{2}{3}$ или $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$. Тогда

$$x + \frac{2x-1}{3x-2} = 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Условие $x > \frac{2}{3}$ выполнено, так что $x = 1$ — корень уравнения (11).

2. $\frac{1}{2} \leq x < \frac{2}{3}$. Тогда

$$x - \frac{2x-1}{3x-2} = 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{10}}{3}.$$

Первый корень $\frac{5+\sqrt{10}}{3}$ больше 1 и потому не принадлежит рассматриваемому промежутку. Для второго корня имеем оценки:

$$\begin{aligned} \frac{5 - \sqrt{10}}{3} - \frac{1}{2} &= \frac{7 - 2\sqrt{10}}{6} = \frac{\sqrt{49} - \sqrt{40}}{6} > 0; \\ \frac{5 - \sqrt{10}}{3} - \frac{2}{3} &= \frac{3 - \sqrt{10}}{3} = \frac{\sqrt{9} - \sqrt{10}}{3} < 0. \end{aligned}$$

Таким образом, число $\frac{5-\sqrt{10}}{3}$ принадлежит рассматриваемому промежутку и потому является корнем уравнения (11).

3. $x \leq 0$. Тогда

$$-x + \frac{2x-1}{3x-2} = 2 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{10}}{3}.$$

Рассматриваемому промежутку принадлежит число $\frac{-1-\sqrt{10}}{3}$, которое, таким образом, является корнем уравнения (11).

Итак, уравнение (11) имеет ровно три корня, так что значение $a = 2$ подходит. Точно так же убеждаемся (сделайте это самостоятельно!), что и в случае $a = \frac{2}{3}$ тоже получается ровно три корня. Здесь оба необходимых условия оказались к тому же достаточными.

Ответ: $a = 2$ или $a = \frac{2}{3}$.

Задача 5. При каких значениях a система

$$\begin{cases} ax^2 + a - 1 = y - |\sin x|, \\ \operatorname{tg}^2 x + y^2 = 1 \end{cases} \quad (12)$$

имеет единственное решение?

Решение. Система не меняет своего вида при замене x на $-x$; иными словами, система (12) симметрична относительно преобразования $(x, y) \mapsto (-x, y)$ (которое является отражением координатной плоскости относительно оси ординат). Следовательно, наряду с решением (x_0, y_0) система (12) будет иметь также решение $(-x_0, y_0)$, и поэтому случай единственного решения возможен лишь при $x_0 = 0$ (то есть когда решением системы служит неподвижная точка преобразования, расположенная на оси ординат).

Подставляя в (12) значение $x = 0$, получим систему

$$\begin{cases} a - 1 = y, \\ y^2 = 1, \end{cases}$$

из которой легко находим $a = 2$ или $a = 0$. Это необходимые условия единственности решения; проверим, являются ли они достаточными.

Пусть $a = 2$. Тогда система (12) примет вид:

$$\begin{cases} 2x^2 + 1 = y - |\sin x|, \\ \operatorname{tg}^2 x + y^2 = 1 \end{cases} \quad (13)$$

Из второго уравнения (13) мы видим, что $|y| \leq 1$. Поэтому для правой части первого уравнения имеем оценку: $y - |\sin x| \leq 1$. В то же время его левая часть: $2x^2 + 1 \geq 1$, так что равенство в первом уравнении (13) возможно лишь в случае одновременного равенства обеих частей единице, то есть при $x = 0, y = 1$. Пара $(0, 1)$ удовлетворяет также второму уравнению и потому является единственным решением системы (13). Стало быть, значение $a = 2$ нам подходит.

Пусть теперь $a = 0$. Система (12) примет вид:

$$\begin{cases} -1 = y - |\sin x|, \\ \operatorname{tg}^2 x + y^2 = 1. \end{cases}$$

Можно указать два решения полученной системы: $(0, -1)$ и $(\pi, -1)$. Следовательно, значение $a = 0$ не годится.

Ответ: $a = 2$.

Задача 6. (МГУ, филологич. ф-т, 2002) Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} y \geq (x - a)^2, \\ x \geq (y - a)^2 \end{cases} \quad (14)$$

имеет единственное решение.

Решение. Заметим, что система (14) переходит сама в себя при замене x на y и y на x . Иными словами, наша система симметрична относительно преобразования $(x, y) \mapsto (y, x)$, которое является отражением координатной плоскости относительно прямой $y = x$ (рис. 1).

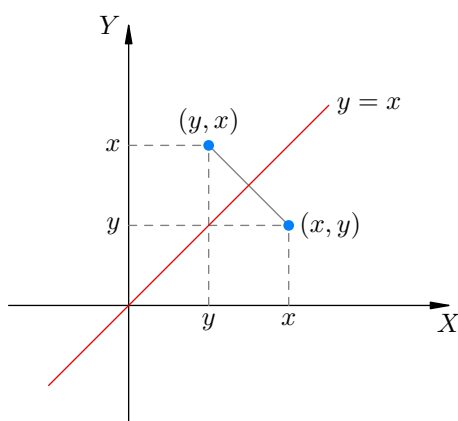


Рис. 1. Отражение $(x, y) \mapsto (y, x)$

Следовательно, наряду с решением (x_0, y_0) система имеет также решение (y_0, x_0) . Поэтому для того, чтобы система (14) имела единственное решение, необходимо, чтобы выполнялось равенство $x_0 = y_0$ (то есть чтобы решением системы служила неподвижная точка преобразования, расположенная на прямой $y = x$).

Полагая в системе $y = x$, получим неравенство

$$x \geq (x - a)^2 \Leftrightarrow x^2 - (2a + 1)x + a^2 \leq 0. \quad (15)$$

Но на прямой $y = x$ должна быть лишь одна точка, являющаяся решением нашего неравенства; поэтому полученное квадратное неравенство (15) должно иметь единственное решение. Значит, дискриминант должен обратиться в нуль:

$$D = (2a + 1)^2 - 4a^2 = 0,$$

откуда $a = -\frac{1}{4}$. Это — необходимое условие на параметр, и нужно проверить его достаточность.

Подставляем $a = -\frac{1}{4}$ в систему (14):

$$\begin{cases} y \geq \left(x + \frac{1}{4}\right)^2, \\ x \geq \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{x}{2} - y + \frac{1}{16} \leq 0, \\ y^2 + \frac{y}{2} - x + \frac{1}{16} \leq 0. \end{cases}$$

Сложим неравенства полученной системы:

$$x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{16} + y^2 - \frac{y}{2} + \frac{1}{16} \leq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 \leq 0.$$

Единственным решением данного неравенства будет пара $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$. Она же будет единственным решением системы (14) при $a = -\frac{1}{4}$, что мы и хотели проверить.

Ответ: $a = -\frac{1}{4}$.

Во всех рассмотренных задачах наблюдалась симметрия относительно какого-то одного преобразования. Однако симметрий может быть несколько!

Задача 7. Найти все значения a , при которых система

$$\begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases} \quad (16)$$

имеет ровно четыре решения.

Решение. Система не меняет своего вида, если заменить x на $-x$, или y на $-y$, или поменять местами x и y . Иными словами, система (16) симметрична относительно преобразований

$$(x, y) \mapsto (-x, y), \quad (x, y) \mapsto (x, -y), \quad (x, y) \mapsto (y, x).$$

Следовательно, если (x_0, y_0) — решение системы (16), то решениями будут также пары $(-x_0, y_0)$, $(x_0, -y_0)$, $(-x_0, -y_0)$, (y_0, x_0) , $(-y_0, x_0)$, $(y_0, -x_0)$, $(-y_0, -x_0)$. Все эти пары получаются в результате последовательных отражений исходной точки относительно координатных осей и прямых $y = \pm x$ (рис. 2).

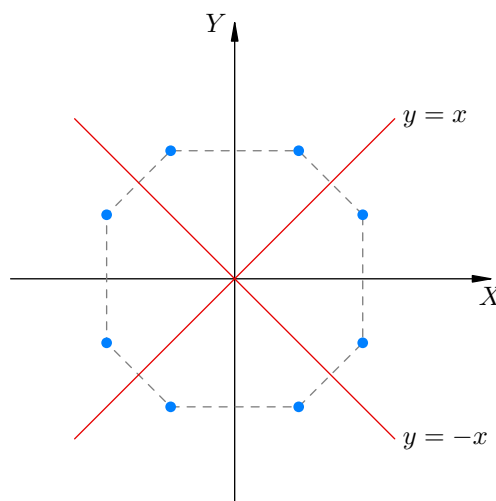


Рис. 2. Симметрия решений системы (16)

Таким образом, если система (16) имеет решение, расположенное вне прямых $x = 0$, $y = 0$, $y = \pm x$, то у этой системы будет не менее восьми решений. Ровно четыре решения система может иметь лишь в том случае, когда она имеет решение, расположенное на одной из прямых $x = 0$, $y = 0$, $y = \pm x$ (тогда восьмиугольник вырождается в квадрат, рис. 3).

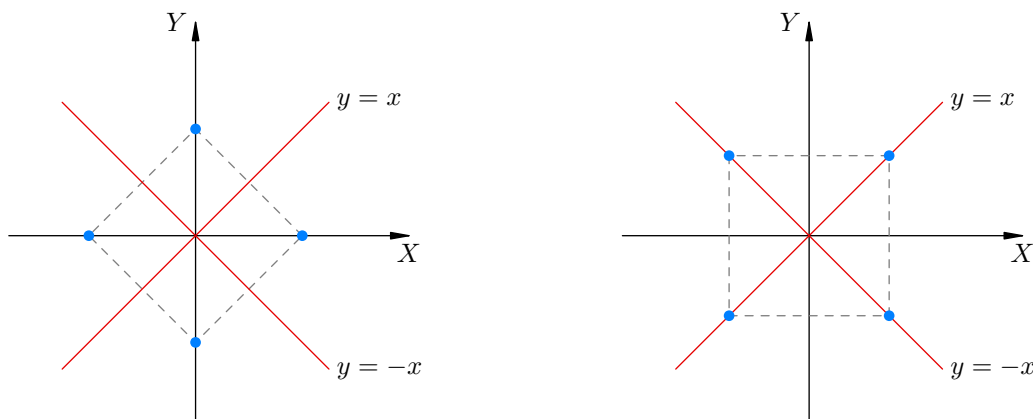


Рис. 3. Система (16) имеет ровно четыре решения

Если $x = 0$ или $y = 0$, то из системы (16) получаем $a = 1$. Если же $y = \pm x$ (то есть $|y| = |x|$), то из системы (16) получаем $a = \frac{1}{2}$. Это необходимые условия на параметр. Остаётся проверить, достаточны ли они.

Пусть $a = 1$. Тогда система (16) примет вид:

$$\begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases} \quad (17)$$

Делаем замену $u = |x|$, $v = |y|$:

$$\begin{cases} u + v = 1, \\ u^2 + v^2 = 1. \end{cases}$$

Решаем эту систему и убеждаемся, что у неё ровно два решения: $u = 1, v = 0$ и $u = 0, v = 1$. Эти две пары (u, v) дают ровно четыре пары (x, y) решений системы (17): $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$. Таким образом, значение $a = 1$ годится.

Пусть теперь $a = \frac{1}{2}$. Тогда система (16) примет вид:

$$\begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (18)$$

Снова делаем замену $u = |x|$, $v = |y|$:

$$\begin{cases} u + v = 1, \\ u^2 + v^2 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $u = v = \frac{1}{2}$, которое даёт ровно четыре решения системы (18): $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Следовательно, значение $a = \frac{1}{2}$ также является подходящим.

Ответ: $a = 1$ или $a = \frac{1}{2}$.

Задачи

1. («Высшая проба», 2012, 9) При каких значениях b , $b \neq 3$, объединение парабол $y = x^2$ и $y = (b - 3)x^2 + bx + 2b - 4$ имеет ось или центр симметрии?

$\{7; 2, 0\} \ni 9$

2. («Высшая проба», 2012, 11) При каком значении параметра a график многочлена

$$x^4 - 6x^3 + 12x^2 + ax$$

симметричен относительно прямой $x = c$ для какого-нибудь значения константы c ?

$6 = 0$

3. (ОММО, 2018) При каких значениях параметра a уравнение

$$3^{x^2 - 2ax + a^2} = ax^2 - 2a^2x + a^3 + a^2 - 4a + 4$$

имеет ровно одно решение?

$1 = 0$

4. («Покори Воробьёвы горы!», 2012) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых графики функций

$$f(x) = 3^{2x^2 - 4x + 3} + a^3 \quad \text{и} \quad g(x) = a \cdot 3^{x^2 - 2x + 3} - 5$$

имеют ровно три общие точки.

$\frac{7}{8} \wedge + 1 = 1$

5. («Покори Воробьёвы горы!», 2017) Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{|x - 1|} = \sqrt{3|y|}, \\ x^2 + 9y^2 + a = 2x - 1 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

$\frac{8}{1} = 1$

6. («Покори Воробьёвы горы!», 2016) Найдите все значения a , при которых имеет единственное решение система

$$\begin{cases} (x^2 + 1)a = y - \cos x, \\ \sin^4 x + |y| = 1. \end{cases}$$

$7 = 0$

7. («Покори Воробьёвы горы!», 2014) Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} y - a^2 + 5(a - 1) = (a^2 - 5a + 6)(x - 3)^6 + \sqrt{(x - 3)^2}, \\ x^2 + y^2 = 2(3x - 4) \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

$7 = 0$ или $1 = 0$

8. («Покори Воробьёвы горы!», 2014) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$2 \frac{(x+1)^2}{x^2+1} + a^2 - 4 = 2a \cos\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$$

имеет единственное решение.

$$\xi = v \text{ или } 0 = v$$

9. («Покори Воробьёвы горы!», 2019, 10–11) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$a^2 (x^2 + 1)^3 + (x^3 + 1)^2 = 12ax^3$$

имеет единственное решение.

$$\Gamma \frac{\zeta}{\Gamma} \cdot 0 \frac{\zeta}{\xi}$$

10. («Физтех», 2009) Найдите, при каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x - y^2 - a = 0, \\ x^2 - y + a = 0. \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$\frac{\Gamma}{\Gamma}$$

11. (МГУ, ф-т почвоведения, 2001) При каких значениях b уравнение

$$\operatorname{tg} |b| = \log_2 (\cos x - |x|)$$

имеет ровно один корень?

$$\mathbb{Z} \ni u \cdot u\lambda = q$$

12. (МГУ, мех.мат., 1990) Найти все a , при которых уравнение

$$x^2 - 2a \sin \cos x + a^2 = 0$$

имеет единственный корень.

$$\Gamma \text{ cis } \zeta = v \text{ или } 0 = v$$

13. (МГУ, геологич. ф-т, 2003) При каких значениях a уравнение

$$2\pi^2(x-2)^2 + 4a \cos(2\pi x) - 25a^3 = 0$$

имеет единственное решение?

$$\text{cis} - '0 = v$$

14. (МГУ, физический ф-т, 1999) При каких значениях a уравнение

$$\cos 2x + 2 \cos x - 2a^2 - 2a + 1 = 0$$

имеет ровно одно решение на промежутке $[0; 2\pi)$?

1'z- = v

15. (МГУ, ф-т психологии, 1995) Найти все a , при которых неравенство

$$\cos x - 2\sqrt{x^2 + 9} \leq -\frac{x^2 + 9}{a + \cos x} - a$$

имеет единственное решение.

z = v

16. (МГУ, химический ф-т, 1999) Найти все a , при которых уравнение

$$\left| \frac{x(2^x - 1)}{2^x + 1} + 2a \right| = a^2 + 1$$

имеет нечётное число корней.

1z = v

17. (МГУ, химический ф-т, 2002) Найти все значения a , при которых уравнение

$$2^{-x^2} \cdot 4^x + \sin \frac{\pi x}{4} + \cos \frac{\pi x}{4} - 2 = a^3 - 3a^2 + a + \sqrt{2}$$

имеет единственное решение.

$\frac{z}{z^2 + 1} = v$

18. (МГУ, ВМК, 1998) Найти все a , при которых уравнение

$$2^{\frac{2x}{1+x^2}} + a \cos \frac{x^2 - 1}{x} + a^2 = \frac{5}{4}$$

имеет единственный корень.

$\frac{z}{z} = v$

19. (МГУ, химический ф-т, 2005) При каких значениях параметра a уравнение

$$|x| + \left| \frac{x + 1}{3x - 1} \right| = a$$

имеет ровно три решения?

z = v

20. (МГУ, экономич. ф-т, 2002) Найти все a , при которых неравенство

$$\sqrt[4]{x^2 - 6ax + 10a^2} + \sqrt[4]{3 + 6ax - x^2 - 10a^2} \geq \sqrt[4]{\sqrt{3a + 24} - \frac{3}{\sqrt{2}} + |y - \sqrt{2}a^2| + |y - \sqrt{3}a|}$$

имеет единственное решение.

$$\boxed{\frac{3}{2} \wedge = v}$$

21. (МГУ, экономич. ф-т, 2005) Найти все b , при которых уравнение

$$b^2 \sin\left(\frac{\pi + 2}{2} - x\right) + \sin^2\left(\frac{2x}{b+1} - \frac{2}{b+1}\right) - b\sqrt{4x^2 + 8 - 8x} = 3 + \arcsin|1 - x|$$

имеет единственное решение.

$$\boxed{\varepsilon = q}$$

22. Найти все значения a , при которых система

$$\text{а) } \begin{cases} (|x| + 1)a = y + \cos x, \\ \sin^4 x + y^2 = 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 + a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$\boxed{0 = v \text{ (} g : z = v \text{ (} v$$

23. (МГУ, МШЭ, 2005) Найти все b , при которых система

$$\begin{cases} (x^2 + 1)b = y + \cos 2x, \\ 2^{|\sin x|} + |y| = 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$\boxed{z = q}$$

24. (МГУ, экономич. ф-т, 1987) Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 3a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$\boxed{\frac{\varepsilon}{v} = v}$$

25. (МГУ, ф-т почвоведения, 2007) Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} \left(5 - 2\sqrt{6}\right)^x + \left(5 + 2\sqrt{6}\right)^x - 5a = y - |y| - 8, \\ x^2 - (a - 4)y = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$\boxed{\forall = v \text{ или } z = v}$$

26. (МГУ, экономич. ф-т, 1990) Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} (3 - 2\sqrt{2})^y + (3 + 2\sqrt{2})^y - 3a = x^2 + 6x + 5, \\ y^2 - (a^2 - 5a + 6)x^2 = 0, \\ -6 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$\boxed{a = 1}$$

27. (МГУ, ИСАА, 1991) При каких значениях b система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ |y| - x = b \end{cases}$$

имеет ровно три решения?

$$\boxed{b = 1}$$

28. (МГУ, ф-т почвоведения, 1995) При каких значениях b система

$$\begin{cases} 4y = 4b + 3 - x^2 + 2x, \\ x^2 + y^2 = 2x \end{cases}$$

имеет два решения?

$$\boxed{b = 1}$$

29. (МГУ, ИСАА, 1998) При каких значениях a система

$$\begin{cases} x^4 - (a - 1)\sqrt{a + 3} \cdot y + a^4 + 2a^3 - 9a^2 - 2a + 8 = 0, \\ y = \sqrt{a + 3} \cdot x^2 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения?

$$\boxed{a = 1}$$

30. (МГУ, ф-т гос. управления, 2002) Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} (3\sqrt{|x|} + |y| - 3)(|x| + 3|y| - 9) = 0, \\ (x - a)^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

$$\boxed{a = \pm 4, 6}$$

31. (МГУ, физический ф-т, 1981) Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y = a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$\frac{2}{3} = v$$

32. (МГУ, экономич. ф-т, 1977) Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1 + a), \\ (x + y)^2 = 14 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

$$\frac{8}{9} = v$$

33. (МГУ, филологич. ф-т, 1984) Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} y \geq x^2 + 2a, \\ x \geq y^2 + 2a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$\frac{8}{1} = v$$

34. (МГУ, филологич. ф-т, 1992) Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} ax^2 + 4ax - y + 7a + 1 = 0, \\ ay^2 - x - 2ay + 4a - 2 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$\frac{9}{2} = v$$

35. (МГУ, географич. ф-т, 1997) Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} ax^2 - 2ax - 2y + 4a - 2 \leq 0, \\ ay^2 + 4ay - 2x + 7a + 4 \leq 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$\frac{8}{1} = v$$

36. (МГУ, мехмат, 2001) Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} (a - 1)x^2 + 2ax + a + 4 \leq 0, \\ ax^2 + 2(a + 1)x + a + 1 \geq 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$\frac{8}{1} = v$$

37. (МГУ, биологич. ф-т, 1991) Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} z \cos(x - y) + (2 + xy) \sin(x + y) - z = 0, \\ x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = a + 2x, \\ (x + y + a \sin^2 x) ((1 - a) \ln(1 - xy) + 1) = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

1 = v

38. (МГУ, химический ф-т, 1986) Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} \sqrt{|y + 3|} = 1 - \sqrt{5|x|}, \\ 16a - 9 - 6y = 25x^2 + y^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

$\frac{91}{1}, \frac{821}{1} = v$

39. (МГУ, биологич. ф-т, 2001) Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} \sin x = \cos(x\sqrt{6 - 2a^2}), \\ \cos x = \left(a - \frac{2}{3}\right) \sin(x\sqrt{6 - 2a^2}) \end{cases}$$

имеет на отрезке $[0; 2\pi]$ единственное решение.

$\left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6} \right\} \ni v$

40. (МГУ, мехмат, 1998) Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} \cos^2(\pi xy) - 2 \sin^2(\pi x) - 3 \sin^2(\pi y) - 2 + \operatorname{tg}(\pi a) = 0, \\ \cos(\pi xy) - \frac{3}{2} \sin^2(\pi x) - 2 \sin^2(\pi y) - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{tg}(\pi a) = 0, \\ \log_2 \left(1 + 4 \sin^2 \left(\frac{\pi a}{4} - \frac{\pi}{16} \right) - x^2 - y^2 \right) \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

$\mathbb{Z} \ni u, n, \frac{1}{6} = v$

41. (МГУ, экономич. ф-т, 1999) Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} a \sin |2z| + \log_5 \left(x \sqrt{2 - 5x^8} \right) + a^2 = 0, \\ ((y^2 - 1) \cos^2 z - y \sin 2z + 1) \left(1 + \sqrt{\pi + 2z} + \sqrt{\pi - 2z} \right) = 0 \end{cases}$$

имеет не более двух различных решений, но не менее одного. Найти эти решения.

Если $a = \frac{1}{\sqrt{6-2}}$, то $\log_5 \left(x \sqrt{2-5x^8} \right) + a^2 = 0$ имеет решение $x = \frac{1}{5}$, $z = 1$, $y = \frac{1}{5}$ или $x = \frac{1}{5}$, $z = 1$, $y = \frac{1}{5}$. Если $a = \frac{1}{\sqrt{6-2}}$, то $\log_5 \left(x \sqrt{2-5x^8} \right) + a^2 = 0$ имеет решение $x = \frac{1}{5}$, $z = 1$, $y = \frac{1}{5}$ или $x = \frac{1}{5}$, $z = 1$, $y = \frac{1}{5}$.

Если $a = \frac{1}{\sqrt{6-2}}$, то $\log_5 \left(x \sqrt{2-5x^8} \right) + a^2 = 0$ имеет решение $x = \frac{1}{5}$, $z = 0$, $y = \frac{1}{5}$ или $x = \frac{1}{5}$, $z = 0$, $y = \frac{1}{5}$.

42. (МГУ, химический ф-т, 1988) Найти все значения параметра a , при которых равносильны системы уравнений

$$\begin{cases} x + 2y = 2 - a, \\ -x + ay = a - 2a^2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x^2 - y^4 - 4x + 3 = 0, \\ 2x^2 + y^2 + (a^2 + 2a - 11)x + 12 - 6a = 0. \end{cases}$$

1-7-0

43. Найдите все значения параметров a и b , при которых система

$$\begin{cases} xyz + z = a, \\ xyz^2 + z = b, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

7-0-0

44. (МГУ, мехмат, 2000-03.5) При каких значениях параметра a уравнение

$$\left(\left(\frac{3}{2} \right)^x + \left(\frac{3}{2} \right)^{a-x} - \frac{3}{5} \left(\frac{3}{2} \right)^a - \frac{8}{5} \right) \cdot \left(\left(\frac{3}{2} \right)^{2x-2} + \left(\frac{3}{2} \right)^{2a-2x-3} - 4 \left(\frac{3}{2} \right)^{2a-5} + 2 \right) = 0$$

имеет хотя бы одно решение и каждое его решение является целым числом?

$\frac{7}{5}; 1$