

Параметры и квадратный трёхчлен. 3

В данной статье мы рассматриваем задачи с параметрами, так или иначе сводящиеся к исследованию квадратных уравнений и неравенств. Никакой дополнительной теории уже не будет; используется материал, который вы усвоили в результате работы с предыдущими двумя листками:

- [Параметры и квадратный трёхчлен. 1;](#)
- [Параметры и квадратный трёхчлен. 2.](#)

Теперь изученные вами методы будут применяться в новых ситуациях.

Задача 1. (МГУ, ВМК, 2003) При всех значениях параметра c решите уравнение

$$4^x + c \cdot 25^x = 3 \cdot 10^x.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде:

$$2^{2x} - 3 \cdot 2^x \cdot 5^x + c \cdot 5^{2x} = 0.$$

Величина 5^{2x} не обращается в нуль ни при каком x , поэтому, деля обе части данного уравнения на 5^{2x} , приходим к равносильному уравнению

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{2x} - 3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x + c = 0.$$

Делаем замену $t = \left(\frac{2}{5}\right)^x$:

$$t^2 - 3t + c = 0. \tag{1}$$

Когда исходная переменная x пробегает множество \mathbb{R} , новая переменная t пробегает множество $(0; +\infty)$. Поэтому мы должны искать положительные корни уравнения (1).

Дискриминант уравнения (1): $D = 9 - 4c$. Имеем три случая.

1. $D < 0$. Так будет при $c > \frac{9}{4}$, и в этом случае уравнение (1) не имеет корней.
2. $D = 0$. Так будет при $c = \frac{9}{4}$. В этом случае уравнение (1) имеет единственный корень $t = \frac{3}{2}$, которому отвечает значение $x = \log_{\frac{2}{5}} \frac{3}{2}$.
3. $D > 0$. Так будет при $c < \frac{9}{4}$. В этом случае уравнение (1) имеет два различных корня:

$$t_1 = \frac{3 + \sqrt{9 - 4c}}{2}, \quad t_2 = \frac{3 - \sqrt{9 - 4c}}{2}.$$

Корень t_1 положителен при всех рассматриваемых c ; данному корню отвечает значение $x = \log_{\frac{2}{5}} \frac{3 + \sqrt{9 - 4c}}{2}$.

Корень t_2 положителен при $c > 0$, и тогда ему отвечает значение $x = \log_{\frac{2}{5}} \frac{3 - \sqrt{9 - 4c}}{2}$. Если же $c \leq 0$, то $t_2 \leq 0$, и в таком случае корню t_2 не отвечает никакое значение x .

Остаётся собрать все случаи и записать ответ.

Ответ: Если $c \leq 0$, то $x = \log_{\frac{2}{5}} \frac{3 + \sqrt{9 - 4c}}{2}$; если $c \in (0; \frac{9}{4})$, то $x = \log_{\frac{2}{5}} \frac{3 + \sqrt{9 - 4c}}{2}$; если $c = \frac{9}{4}$, то $x = \log_{\frac{2}{5}} \frac{3}{2}$; если $c > \frac{9}{4}$, то решений нет.

Задача 2. («Покори Воробьёвы горы!», 2010) При каких значениях параметра a неравенство

$$3 \cdot 4^x - 6a \cdot 2^x + 3a^2 + 2a - 14 < 0$$

не имеет решений?

Решение. Делая замену $t = 2^x$, получим неравенство

$$3t^2 - 6at + 3a^2 + 2a - 14 < 0. \quad (2)$$

Когда переменная x пробегает множество \mathbb{R} , переменная t пробегает множество $(0; +\infty)$. Следовательно, мы можем решать задачу, эквивалентную исходной: найти все значения параметра a , при которых неравенство (2) не имеет *положительных* решений.

Прежде всего найдём дискриминант¹:

$$D = 9a^2 - 3(3a^2 + 2a - 14) = 42 - 6a.$$

Пусть $D \leq 0$, то есть

$$a \geq 7. \quad (3)$$

В этом случае функция $f(t) = 3t^2 - 6at + 3a^2 + 2a - 14$ обращается в нуль не более чем в одной точке и поэтому не принимает отрицательных значений. Следовательно, неравенство (2) не имеет решений, и множество (3) нам подходит.

Пусть теперь $D > 0$, то есть $a < 7$. Тогда наш квадратный трёхчлен $f(t)$ имеет два различных корня:

$$t_1 = \frac{3a - \sqrt{42 - 6a}}{3}, \quad t_2 = \frac{3a + \sqrt{42 - 6a}}{3},$$

и множеством решений неравенства (2) служит интервал $(t_1; t_2)$. Значит, неравенство (2) не будет иметь положительных решений в том и только в том случае, если больший корень неположителен: $t_2 \leq 0$.

Здесь проще действовать «в лоб», используя явное выражение для t_2 . Имеем, таким образом, неравенство:

$$\frac{3a + \sqrt{42 - 6a}}{3} \leq 0,$$

или

$$\sqrt{42 - 6a} \leq -3a.$$

Последнее неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 42 - 6a \leq 9a^2, \\ a \leq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 + 2a - 14 \geq 0, \\ a \leq 0. \end{cases}$$

Решение этой системы труда не представляет, и мы получаем:

$$a \leq \frac{-1 - \sqrt{43}}{3}. \quad (4)$$

Все эти значения a находятся внутри множества $a < 7$ (в рамках которого мы сейчас находимся), поэтому для получения ответа остаётся объединить множества (4) и (3).

Ответ: $a \in \left(-\infty; \frac{-1 - \sqrt{43}}{3}\right] \cup [7; +\infty)$.

¹Величину $D/4$ мы для удобства также называем дискриминантом и обозначаем D .

Задача 3. При каких p уравнение $\sin^2 x + p \sin x = p^2 - 1$ имеет решения?

Решение. Замена $t = \sin x$ приводит к квадратному уравнению относительно t :

$$t^2 + pt - p^2 + 1 = 0. \quad (5)$$

Когда переменная x пробегает множество \mathbb{R} , переменная t пробегает множество $[-1; 1]$. Поэтому имеем эквивалентную переформулировку исходной задачи: при каких p уравнение (5) имеет корни на отрезке $[-1; 1]$?

Уравнение (5) будет иметь корни при неотрицательном дискриминанте $D = 5p^2 - 4$. Мы отдельно рассмотрим случаи $D = 0$ и $D > 0$.

Пусть сначала $D = 0$, тогда

$$p = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}. \quad (6)$$

В этом случае уравнение (5) имеет единственный корень $t_0 = -\frac{p}{2}$, то есть $t_0 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ при $p = \frac{2}{\sqrt{5}}$ или $t_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ при $p = -\frac{2}{\sqrt{5}}$. Оба этих значения t_0 принадлежат отрезку $[-1; 1]$, поэтому оба значения (6) нам подходят.

Пусть теперь $D > 0$, тогда

$$p < -\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad p > \frac{2}{\sqrt{5}}. \quad (7)$$

При таких значениях p уравнение (5) имеет два различных корня. Требуется, чтобы хотя бы один из них был расположен на отрезке $[-1; 1]$. Эта ситуация исчерпывается следующими тремя вариантами:

- 1) оба корня принадлежат интервалу $(-1; 1)$;
- 2) один корень принадлежит интервалу $(-1; 1)$, а второй корень лежит вне отрезка $[-1; 1]$;
- 3) один из корней равен 1 или -1 .

Первый вариант описывается условиями, которые подробно обсуждались в предыдущей статье «[Параметры и квадратный трёхчлен. 2](#)». Именно, оба корня принадлежат интервалу $(-1; 1)$ в том и только в том случае, если значения функции

$$f(t) = t^2 + pt - p^2 + 1$$

на концах данного интервала положительны, а абсцисса вершина параболы $y = f(t)$ лежит внутри интервала:

$$\begin{cases} f(-1) > 0, \\ f(1) > 0, \\ -1 < -\frac{p}{2} < 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^2 + p - 2 < 0, \\ p^2 - p - 2 < 0, \\ -2 < p < 2. \end{cases}$$

Решением полученной системы является множество

$$-1 < p < 1. \quad (8)$$

Второй вариант расположения (когда один корень принадлежит $(-1; 1)$, а второй не принадлежит $[-1; 1]$) реализуется тогда и только тогда, когда функция $f(t)$ принимает на концах отрезка значения разных знаков: $f(-1) \cdot f(1) < 0$.

Третий вариант расположения (когда один из корней равен ± 1) характеризуется равенствами $f(-1) = 0$ или $f(1) = 0$, которые объединяются в одно равенство $f(-1) \cdot f(1) = 0$.

И теперь мы можем объединить второй и третий вариант, описав их оба одним условием:

$$f(-1) \cdot f(1) \leq 0.$$

В результате получаем неравенство:

$$(p^2 + p - 2)(p^2 - p - 2) \leq 0 \Leftrightarrow (p + 2)(p + 1)(p - 1)(p - 2) \leq 0,$$

которое легко решается методом интервалов:

$$-2 \leq p \leq -1, \quad 1 \leq p \leq 2. \quad (9)$$

Напомним, что сейчас мы находимся в рамках случая $D > 0$. Чтобы получить подходящие значения p для этого случая, нужно объединить множества (8) и (9), после чего пересечь это объединение с множеством (7). В результате получим:

$$-2 \leq p < -\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \frac{2}{\sqrt{5}} < p \leq 2.$$

Теперь для получения окончательного ответа нужно к данному множеству добавить значения (6), возникшие в рамках случая $D = 0$.

Ответ: $p \in \left[-2; -\frac{2}{\sqrt{5}}\right] \cup \left[\frac{2}{\sqrt{5}}; 2\right]$.

Задача 4. При каких a уравнение $4^{\sin x} + a \cdot 2^{\sin x} + a^2 - 1 = 0$ не имеет корней?

Решение. Замена $t = 2^{\sin x}$ приводит к квадратному уравнению относительно t :

$$t^2 + at + a^2 - 1 = 0. \quad (10)$$

Когда переменная x пробегает множество \mathbb{R} , величина $\sin x$ пробегает отрезок $[-1; 1]$, а переменная t пробегает соответственно отрезок $[\frac{1}{2}; 2]$. Поэтому исходное уравнение не имеет корней тогда и только тогда, когда уравнение (10) не имеет корней на отрезке $[\frac{1}{2}; 2]$.

Прежде всего найдём дискриминант уравнения (10):

$$D = 4 - 3a^2.$$

Нас устраивает, в частности, случай $D < 0$, когда уравнение (10) вообще не имеет корней. В этом случае имеем:

$$a < -\frac{2}{\sqrt{3}}, \quad a > \frac{2}{\sqrt{3}}. \quad (11)$$

Эти значения a нам подходят.

Теперь рассмотрим случай $D = 0$, то есть $a = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$. Тогда уравнение (10) имеет единственный корень $t_0 = -\frac{a}{2}$. Если $a = -\frac{2}{\sqrt{3}}$, то $t_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \in [\frac{1}{2}; 2]$, что нас не устраивает; следовательно, $a = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ не годится. Если же $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$, то $t_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \notin [\frac{1}{2}; 2]$, и поэтому значение

$$a = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad (12)$$

нам подходит.

Наконец, перейдём к случаю $D > 0$, то есть

$$-\frac{2}{\sqrt{3}} < a < \frac{2}{\sqrt{3}}. \quad (13)$$

Уравнение (10) имеет два различных корня, и оба они должны находиться вне отрезка $[\frac{1}{2}; 2]$. Здесь логически возможны три варианта:

- 1) оба корня лежат слева от этого отрезка;
- 2) оба корня лежат справа от этого отрезка;
- 3) оба корня расположены по разные стороны от этого отрезка.

Первый вариант (оба корня меньше $\frac{1}{2}$) реализуется тогда и только тогда когда выполнены следующие условия (снова см. «[Параметры и квадратный трёхчлен. 2](#)»):

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) > 0, \\ t_0 < \frac{1}{2}, \end{cases}$$

где $f(t) = t^2 + at + a^2 - 1$ и t_0 — абсцисса вершины параболы $y = f(t)$. Имеем:

$$\begin{cases} a^2 + \frac{a}{2} - \frac{3}{4} > 0, \\ -\frac{a}{2} < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2 + 2a - 3 > 0, \\ a > -1. \end{cases}$$

Множество решений полученной системы:

$$a > \frac{\sqrt{13} - 1}{4}. \quad (14)$$

Аналогично, второй вариант (оба корня больше 2) характеризуется системой неравенств

$$\begin{cases} f(2) > 0, \\ t_0 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2a + 3 > 0, \\ a < -4. \end{cases}$$

Первое неравенство системы выполнено при всех a , поэтому имеем здесь

$$a < -4. \quad (15)$$

Наконец, третий вариант (отрезок $[\frac{1}{2}; 2]$ расположен между корнями) характеризуется следующей системой:

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) < 0, \\ f(2) < 0. \end{cases}$$

Второе неравенство этой системы имеет вид $a^2 + 2a + 3 < 0$ и решений не имеет; вместе с ним не имеет решений и вся система. Значит, третий вариант не реализуется.

Теперь, чтобы получить подходящие a в рамках нашего случая $D > 0$, нужно объединить множества (14) и (15), и полученное объединение пересечь с множеством (13). Получим:

$$\frac{\sqrt{13} - 1}{4} < a < \frac{2}{\sqrt{3}}. \quad (16)$$

(Очевидно, $\frac{\sqrt{13}-1}{4} < \frac{2}{\sqrt{3}}$ поскольку $\frac{\sqrt{13}-1}{4} < 1$ и $\frac{2}{\sqrt{3}} > 1$.)

Для получения окончательного ответа объединяем найденные множества значений a в случаях $D < 0$, $D = 0$ и $D > 0$, то есть множества (11), (12) и (16).

Ответ: $a \in \left(-\infty; -\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{13}-1}{4}; +\infty\right)$.

Задача 5. (МГУ, МШЭ, 2007) При каких значениях параметра a уравнение

$$16^x - 3 \cdot 2^{3x+1} + 2 \cdot 4^{x+1} - (4 - 4a) \cdot 2^{x-1} - a^2 + 2a - 1 = 0$$

имеет три различных корня?

Решение. Перепишем уравнение так:

$$2^{4x} - 6 \cdot 2^{3x} + 8 \cdot 2^{2x} + 2(a - 1) \cdot 2^x - (a - 1)^2 = 0.$$

Делаем замену $t = 2^x$ и, кроме того, вводим новый параметр $b = a - 1$:

$$t^4 - 6t^3 + 8t^2 + 2bt - b^2 = 0.$$

Наш единственный шанс справиться с уравнением четвёртой степени — искать разложение левой части на множители. Преобразуем её следующим образом²:

$$\begin{aligned} t^4 - 6t^3 + 8t^2 + 2bt - b^2 &= t^4 - 6t^3 + 9t^2 - t^2 + 2bt - b^2 = t^2(t^2 - 6t + 9) - (t^2 - 2bt + b^2) = \\ &= t^2(t - 3)^2 - (t - b)^2 = (t(t - 3) - (t - b))(t(t - 3) + (t - b)) = \\ &= (t^2 - 4t + b)(t^2 - 2t - b). \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к уравнению:

$$(t^2 - 4t + b)(t^2 - 2t - b) = 0. \quad (17)$$

Когда x пробегает множество \mathbb{R} , переменная t пробегает множество $(0; +\infty)$. Поэтому эквивалентная переформулировка исходной задачи такова: при каких b уравнение (17) имеет три различных положительных корня?

Уравнение (17) равносильно совокупности двух квадратных уравнений:

$$t^2 - 4t + b = 0, \quad (18)$$

$$t^2 - 2t - b = 0, \quad (19)$$

и имеет самое большее четыре корня.

Отметим сразу, что уравнение (17) не может иметь четырёх положительных корней (а такой случай логически возможен: ведь в условии исходной задачи не сказано, что корней должно быть *ровно три*). В самом деле, произведение корней уравнения (18) равно b , а произведение корней уравнения (19) равно $-b$; эти два произведения не могут быть одновременно положительными ни при каком b .

Если дискриминант хотя бы одного из уравнений (18), (19) отрицателен, то совокупность этих уравнений имеет самое большее два корня. Следовательно, оба дискриминанта должны быть неотрицательными:

$$\begin{cases} 4 - b \geq 0, \\ 1 + b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq b \leq 4.$$

Более того, случаи равенства нулю какого-либо дискриминанта исключаются. В самом деле, если $b = -1$, то уравнение (18) принимает вид $t^2 - 4t - 1 = 0$ и имеет ровно один положительный корень (поскольку произведение корней равно -1), а уравнение (19) принимает вид $(t - 1)^2 = 0$ и также имеет ровно один положительный корень (равный 1); всего получается два

²На олимпиаде или экзамене нижеследующие выкладки можно оставить в черновике, а в чистовике просто написать: «Нетрудно проверить, что $t^4 - 6t^3 + 8t^2 + 2bt - b^2 = (t^2 - 4t + b)(t^2 - 2t - b)$ ». Не смущайтесь, ничего криминального тут нет. Вы не обязаны объяснять, как получено это равенство. Каждый может убедиться в его справедливости непосредственным вычислением.

положительных корня, так что $b = -1$ не годится. Если же $b = 4$, то уравнение (18) принимает вид $(t - 2)^2 = 0$ и имеет ровно один положительный корень, а уравнение (19) принимает вид $t^2 - 2t - 4 = 0$ и также имеет ровно один положительный корень; снова получаются только два положительных корня, и $b = 4$ также не годится.

Таким образом, мы ограничены множеством

$$-1 < b < 4 \tag{20}$$

возможных значений параметра b . При этих b оба дискриминанта положительны, и каждое уравнение (18), (19) имеет два корня.

Выясним, при каких b уравнения (18) и (19) могут иметь общий корень. Запишем систему этих уравнений:

$$\begin{cases} t^2 - 4t + b = 0, \\ t^2 - 2t - b = 0, \end{cases}$$

и вычтем из первого второе: $-2t + 2b = 0$, то есть $t = b$. Подставляя это в любое из уравнений системы, получим $b^2 - 3b = 0$, откуда $b = 0$ или $b = 3$. Оба этих значения b принадлежат множеству (20) и поэтому будут ниже рассмотрены отдельно.

Итак, последовательно рассматриваем случаи, исчерпывающие всё множество (20) возможных значений b .

- $-1 < b < 0$.

Уравнение (18) имеет ровно один положительный корень (поскольку произведение корней равно $b < 0$).

Уравнение (19) имеет два положительных корня (поскольку сумма корней равна $2 > 0$ и произведение корней равно $-b > 0$).

Всего получается три различных положительных корня (совпадений корней нет, так как в рассматриваемом случае $b \neq 0, 3$). Следовательно, интервал $-1 < b < 0$ нам подходит.

- $b = 0$.

Уравнения (18) и (19) принимают вид $t^2 - 4t = 0$ и $t^2 - 2t = 0$ соответственно. Их совокупность имеет два положительных корня (2 и 4), так что $b = 0$ не годится.

- $0 < b < 3$ и $3 < b < 4$.

Уравнение (18) имеет два положительных корня, уравнение (19) имеет ровно один положительный корень. Всего имеем три положительных корня (совпадений нет), так что интервалы $0 < b < 3$ и $3 < b < 4$ нам подходят.

- $b = 3$.

Уравнение (18) принимает вид $t^2 - 4t + 3 = 0$ и имеет корни 1 и 3. Уравнение (19) принимает вид $t^2 - 2t - 3 = 0$ и имеет корни -1 и 3. Всего получается два положительных корня, так что $b = 3$ не подходит.

Итак, подходящие интервалы значений b : $-1 < b < 0$, $0 < b < 3$, $3 < b < 4$. Вспоминая, что $a = b + 1$, получаем искомое множество значений параметра a : $0 < a < 1$, $1 < a < 4$, $4 < a < 5$.

Ответ: $a \in (0; 1) \cup (1; 4) \cup (4; 5)$.

Задачи

1. (МГУ, ВМК, 2003) При всех значениях параметра d решите уравнение

$$4^x + d \cdot 49^x = 4 \cdot 14^x.$$

$$\left[\frac{d}{4} \leq 0 \right] \cup \left[\frac{d}{4} > 0 \right] \Rightarrow \left[\frac{d}{4} \leq 0 \right] \cup \left[\frac{d}{4} > 0 \right]$$

2. («Покори Воробьёвы горы!», 2010) При каких значениях параметра a неравенство

$$9^x - 2a \cdot 3^x + a^2 + a - 5 < 0$$

не имеет решений?

$$\left(\frac{1}{2} \leq a < 1 \right) \cup \left(a \geq 1 \right)$$

3. («Покори Воробьёвы горы», 2006) При всех значениях a решите уравнение

$$3^{\frac{ax+2}{x^2+2}} + 3^{\frac{3x^2-ax+4}{x^2+2}} = 12.$$

$$\left[\frac{a}{2} \leq 0 \right] \cup \left[\frac{a}{2} > 0 \right] \Rightarrow \left[\frac{a}{2} \leq 0 \right] \cup \left[\frac{a}{2} > 0 \right]$$

4. (ОММО, 2019) При каких значениях параметра a уравнение

$$\log_2 (2x^2 + (2a + 1)x - 2a) - 2 \log_4 (x^2 + 3ax + 2a^2) = 0$$

имеет два различных корня, сумма квадратов которых больше 4?

$$\left(\frac{1}{2} \leq a < 1 \right) \cup \left(a \geq 1 \right)$$

5. (МГУ, ф-т почвоведения, 1995) Найти все a , при которых уравнение

$$2 \cos 2x - 4a \cos x + a^2 + 2 = 0$$

не имеет корней.

$$\left(\frac{1}{2} \leq a < 1 \right) \cup \left(a \geq 1 \right)$$

6. (МГУ, ДВИ, 2012.7) Определите, при каких значениях параметра a уравнение

$$a\sqrt{x+y} = \sqrt{3x} + 2\sqrt{y}$$

имеет единственное решение (x, y) .

$$\left(\frac{1}{2} \leq a < 1 \right) \cup \left(a \geq 1 \right)$$

7. (МГУ, МШЭ, 2007) При каких значениях параметра b уравнение

$$81^x - 2 \cdot 3^{3x+1} + 8 \cdot 9^x + (6b - 12) \cdot 3^{x-1} - b^2 + 4b - 4 = 0$$

имеет три различных корня?

$$(9; 5) \cap (5; 2) \cap (2; 1) \ni q$$

8. («Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$16^x - 6 \cdot 8^x + 8 \cdot 4^x + (2 - 2a) \cdot 2^x - a^2 + 2a - 1 = 0$$

имеет ровно три различных корня.

$$(2; 1) \cap (1; 2) \cap (2; 3) \ni q$$

9. («Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$a \cdot 4^{\frac{1}{x}-1} + (a-1) \cdot 2^{\frac{1}{x}} - a^3 + 3a - 2 = 0$$

не имеет корней.

$$\frac{1}{14} \wedge \frac{1}{3} \ni 1 = a \geq 0, a \geq 2$$

10. («Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11) Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство

$$(x + \log_4 |a|) (x + \log_{|a|} 4) (x^2 + 10 \cdot 2^a \cdot x + a^2 - 3) \geq 0$$

выполняется для любого x .

$$2 = a \wedge 4 = a$$

11. («Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11) Найдите все значения a , при каждом из которых сумма длин промежутков, составляющих множество (возможно, пустое) решений неравенства

$$\log_2 (x^2 + 4ax + 4a^2 - a) < 2,$$

меньше 2.

$$(\infty; \frac{1}{6}) \cap (3; \infty) \ni q$$

12. («Покори Воробьёвы горы!», 2014) Найдите все значения a , при которых уравнение

$$\log_2^2 \left(\frac{2x}{1+x^2} \right) + 2(a-1) \log_2 \left(\frac{x}{1+x^2} \right) + a^2 - a - 2 = 0$$

имеет решение.

$$(\infty; 0] \ni q$$

13. («Ломоносов», 2009) При каждом значении a найдите все значения x , удовлетворяющие уравнению

$$\log_3 \left(\frac{x^2}{x-1} - a + 1 \right) = \log_3 \frac{x^2}{x-1} - \log_3 (a-1).$$

$$\text{Если } a > 2, \text{ то } a = x - 1 \text{ или } x = \frac{a-1}{2}; \text{ если } a \leq 2, \text{ то решений нет}$$

14. («Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11) При каждом действительном значении параметра a найдите количество различных действительных корней уравнения

$$16x^4 + ax^2 + 1 = 32x^3 + 8x.$$

[4] 4 корня при $a > -40$; 3 корня $a = -40$; 2 корня при $-40 < a < -24$; 1 корень при $a = -24$; 0 корней при $a < -24$

15. (МГУ, мехмат, 1993-07.2) Найти все a , при которых уравнение

$$4^x + (a^2 + 5) \cdot 2^x + 9 - a^2 = 0$$

не имеет корней.

[3; 8] $\ni a$

16. (МГУ, мехмат, 1995-05.3) Найти все a , при которых функция

$$f(x) = a(2 \sin x + \cos^2 x + 1)$$

не принимает значений, больших 3.

[1; 3] $\ni a$

17. (МГУ, мехмат, 2003-05.4) Числа p и q подобраны так, что уравнение

$$2^{1+x} + p + q \cdot 2^{1-x} = 0$$

имеет ровно два различных корня, а их сумма равна 4. Найти произведение всех различных корней уравнения

$$(x^2 - 5x - 300)(x^2 - px - q) = 0.$$

[4800]

18. (МГУ, мехмат, 2002-05.4) Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\log_{a+1} x + \log_x(19 - 8a) = 2$$

имеет по крайней мере два корня и при этом произведение всех его корней не меньше 0,01.

$(\frac{8}{61}; \frac{7}{6}) \cap (\frac{7}{6}; 7) \cap (0; \frac{01}{6}]$

19. (МГУ, мехмат, 1998-03.6) Найти все a , при которых уравнение

$$(x^2 - (a + 1)x + 3(a - 2)) \log_{a-x}(2a - x - 1) = 0$$

имеет хотя бы один корень на отрезке $[-1; 2]$, а вне этого отрезка корней не имеет.

[4] $\cap [1; 3] \ni a$

20. (МГУ, мехмат, 1996-07.6) Найти все a , при которых уравнение

$$(x^2 - x + a^2 + 2)^2 = 4a^2(2x^2 - x + 2)$$

имеет ровно три различных корня.

$$\frac{p}{1+\frac{p}{2}} \mp \sqrt{\frac{p}{2}} = v$$

21. (МГУ, физический ф-т, 1985) При каждом a решить уравнение

$$4^x - 2a(a+1)2^{x-1} + a^3 = 0.$$

$$\text{Если } a > 0, \text{ то } x = \log_2 a^2; \text{ если } a = 0, \text{ то решений нет; если } a < 0, \text{ то } x = \log_2 a^2 \text{ и } x = \log_2 a^2 + 1$$

22. (МГУ, физический ф-т, 1990) При каждом a решить уравнение

$$\log_{\sqrt{2-x}} \sqrt{2x+a} = 2.$$

$$\text{Если } a \in (-4; -1) \cup (-1; +\infty), \text{ то } x = \sqrt{a+5}; \text{ при остальных } a \text{ решений нет}$$

23. (МГУ, географич. ф-т, 2000) Найти все a , при которых уравнение

$$\log_{a-6,5}(x^2+1) = \log_{a-6,5}((a-5)x)$$

имеет ровно два различных корня.

$$(\infty; +\infty) \cup (7; 7,5) \ni a$$

24. (МГУ, физический ф-т, 2001) При каждом a решить неравенство

$$3(2x-a) + 5a\sqrt{2x-a} - 2a^2 > 0.$$

$$\text{Если } a > 0, \text{ то } x > \frac{4a^2+a}{2}; \text{ если } a \leq 0, \text{ то } x < \frac{18}{a^2+9a}$$

25. (МГУ, физический ф-т, 1996) При каждом a решить неравенство

$$2 - \log_a x < \log_a(x-1).$$

$$\text{Если } a \in (0; 1), \text{ то } x \in \left(1; \frac{1+\sqrt{1+4a^2}}{1+\sqrt{1+4a^2}}\right); \text{ если } a \in (1; +\infty), \text{ то } x \in \left(\frac{2}{1+\sqrt{1+4a^2}}; +\infty\right); \text{ при остальных } a \text{ решений нет}$$

26. (МГУ, физический ф-т, 1999) При каждом a решить неравенство

$$\log_{2a} \log_3 x^2 > 1.$$

$$\text{Если } a \in (0; \frac{2}{3}), \text{ то } x \in (-3^a; -1) \cup (1; 3^a); \text{ если } a \in (\frac{2}{3}; +\infty), \text{ то } x \in (-\infty; -3^a) \cup (3^a; +\infty); \text{ при остальных } a \text{ решений нет}$$

27. (МГУ, физический ф-т, 1999) При каждом a решить уравнение

$$\log_a(x^2 - 3a) = \log_a(ax^2 - 3x).$$

Если $a \in (0; 1) \cup (1; 3]$, то $-a - 3 < x$ и $x = a$ и $x = a - 3$; при остальных a корней нет

28. (МГУ, физический ф-т, 2000) При каждом $a > 1$ решить неравенство

$$a^x(a-1)^x - 2a^{x+1} - (a-1)^x + 2a \leq 0.$$

Если $a \in (1; 2)$, то $x \in (-\infty; \log_{a-1} 2a] \cup [0; +\infty)$; если $a = 2$, то $x \leq 0$; если $a > 2$, то $x \in [0; \log_{a-1} 2a]$

29. (МГУ, геологич. ф-т, 1997) Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} a(x-4) = 3(y+2), \\ y + \sqrt{x} = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

$(0; \frac{7}{8}) \cap (\frac{7}{8}; \frac{2}{3}] \ni a$

30. (МГУ, геологич. ф-т, 1995) Найти все a , при которых неравенство

$$9^x < 20 \cdot 3^x + a$$

не имеет ни одного целочисленного решения.

$66 - \ni a$

31. (МГУ, ф-т почвоведения, 1988) Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} x^2 + 2ax + 4a^2 - 5a + 3 \leq 4 \sin y - 3 \cos y, \\ 0 \leq y \leq 2\pi \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$2 = a$ или $\frac{8}{1} = a$

32. (МГУ, геологич. ф-т, 1999) Найти наибольшее значение a , при котором уравнение

$$\operatorname{arctg} \left| 9^x + 4^x + a\sqrt{3} \cdot 6^x \right| = 0$$

имеет хотя бы один корень.

$2 \wedge -$

33. (МГУ, геологич. ф-т, 1989) Найти все a , при которых уравнение

$$(a^2 + 8a + 16)(2 - 2 \cos x - \sin^2 x) + (32 + 2a^2 + 16a)(\cos x - 1) + 3a + 10 = 0$$

не имеет корней.

$(2; 3) \cap (\frac{8}{11}; +\infty) \ni a$

34. (МГУ, ВМК, 1983) При каждом a решить уравнение

$$(x - 3)(x + 1) + 3(x - 3)\sqrt{\frac{x + 1}{x - 3}} = (a - 1)(a + 2).$$

$$\begin{aligned} & \boxed{\text{Если } a - 2 > a \text{ и } a < 2, \text{ то } \sqrt{\frac{x + 1}{x - 3}} = 1 \text{ и } (x - 3)(x + 1) + 3(x - 3) = (a - 1)(a + 2).} \\ & \boxed{\text{Если } a - 2 = a \text{ и } a = 2, \text{ то } \sqrt{\frac{x + 1}{x - 3}} = 1 \text{ и } (x - 3)(x + 1) + 3(x - 3) = (a - 1)(a + 2).} \\ & \boxed{\text{Если } a - 2 < a \text{ и } a > 2, \text{ то } \sqrt{\frac{x + 1}{x - 3}} = -1 \text{ и } (x - 3)(x + 1) - 3(x - 3) = (a - 1)(a + 2).} \end{aligned}$$

35. (МГУ, ИСАА, 1995) Найти все a , при которых неравенство

$$x^2 + 4x + 6a|x + 2| + 9a^2 \leq 0$$

имеет не более одного решения.

$$\boxed{\frac{8}{7} \leq a}$$

36. (МГУ, ф-т почвоведения, 1999) Найти все значения параметра β , при которых уравнение

$$(x^2 + x)(x^2 + 5x + 6) = \beta$$

относительно x имеет ровно три корня.

$$\boxed{\frac{91}{6}}$$

37. (МГУ, филологич. ф-т, 1989) Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} x + y + z = x^2 + 4y^2, \\ x + 2y + 3z = a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$\boxed{\frac{17}{11} = a}$$

38. (МГУ, физический ф-т, 1994) Найти все a , при которых уравнение

$$2a(x + 1)^2 - |x + 1| + 1 = 0$$

имеет четыре различных корня.

$$\boxed{\left(\frac{8}{7}; 0\right) \ni a}$$

39. (МГУ, ВМК, 1988) Найти все a , при которых уравнение

$$\left((2x + a)\sqrt{22a - 4a^2 - 24} - 2(x^2 + x) \lg a \right) \lg \frac{36a - 9a^2}{35} = 0$$

имеет не менее двух различных корней, один из которых неотрицателен, а другой не превосходит -1 .

$$\boxed{(4; 7] \cap \left\{ \frac{8}{7}, \frac{7}{8} \right\} \ni a}$$

40. (МГУ, физический ф-т, 1998) Найти все a , при которых неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + ax + 1) < 1$$

выполняется для любого $x < 0$.

$$\boxed{a > 0}$$

41. (МГУ, физический ф-т, 1998) Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} \log_3(y - 3) - 2 \log_9 x = 0, \\ (x + a)^2 - 2y - 5a = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

$$\boxed{a \in [-\frac{9}{2}; 9]}$$

42. (МГУ, экономический ф-т, 1995) Найти все a , при которых уравнение

$$x - 2 = \sqrt{2 - 2(a + 2)x}$$

имеет единственный корень.

$$\boxed{a \geq \frac{3}{2}}$$

43. (МГУ, экономический ф-т, 1978) Найти все a , при которых неравенство

$$a^2 + 2a - \sin^2 x - 2a \cos x > 2$$

выполняется для любого x .

$$\boxed{a \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)}$$

44. (МГУ, ВМК, 1996) При каждом a решить уравнение

$$25^x - (a - 1) \cdot 5^x + 2a + 3 = 0.$$

$$\boxed{\text{Если } a = 1, \text{ то } x = 1; \text{ если } a < 1, \text{ то } x = \log_5 \frac{a-1 \pm \sqrt{a^2-10a-11}}{2}}$$

$$\boxed{\text{Если } a > -\frac{2}{3}, \text{ то } x = \log_5 \frac{a-1 \pm \sqrt{a^2-10a-11}}{2}; \text{ если } a \in [-\frac{2}{3}; 1), \text{ то решений нет;}}}$$

45. (МГУ, экономический ф-т, 1991) Найти все a , при которых уравнение

$$\sin^2 x + (a - 2)^2 \sin x + a(a - 2)(a - 3) = 0$$

имеет на отрезке $[0; 2\pi]$ ровно три различных корня.

$$\boxed{a \in \{0, 2, 3 + \sqrt{5}\}}$$

46. (МГУ, ИСАА, 1998) При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^4 - (a-1)\sqrt{a+3}y + a^4 + 2a^3 - 9a^2 - 2a + 8 = 0, \\ y = \sqrt{a+3}x^2 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения?

$$\boxed{z = v}$$

47. (МГУ, МШЭ, 2005) При каких значениях параметра a уравнение

$$(a-1) \cdot 4^x + (2a-3) \cdot 6^x = (3a-4) \cdot 9^x$$

имеет единственное решение?

$$\boxed{(\infty+; \frac{8}{7}] \cap \{\frac{7}{8}\} \cap [1; \infty-) \ni v}$$

48. (МГУ, ф-т психологии, 1989) При каждом значении параметра a найдите все решения неравенства

$$x + 2a - 2\sqrt{3ax + a^2} > 0.$$

$$\boxed{(\infty+; v_8) \cap (0; \frac{8}{9}-] \ni x \text{ ол } 0 < v \text{ ил } 0 < x \text{ ол } 0 = v \text{ ил } 0 \text{ ол } 0 > v \text{ ил } 0 > x \text{ ол } 0 > v \text{ ил } 0 > x \text{ ол } 0 > v}$$

49. (МГУ, экономический ф-т, 2003) Найдите все значения b , при которых уравнение

$$3\sqrt[5]{x+2} - 16b^2\sqrt[5]{32x+32} = \sqrt[10]{x^2+3x+2}$$

имеет единственное решение.

$$\boxed{(\infty+; \frac{7}{2\sqrt{2}}] \cap [\frac{7}{1}; \frac{7}{1}-] \cap [\frac{7}{2\sqrt{2}}; \infty-) \ni q}$$

50. (МГУ, географич. ф-т, 2002) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$(a-1)\cos^2 x - (a^2+a-2)\cos x + 2a^2 - 4a + 2 = 0$$

имеет более одного решения на отрезке $[0; \frac{4\pi}{3}]$.

$$\boxed{\{1\} \cap [\frac{01}{8}; \frac{8}{1}-) \ni v}$$

51. (МГУ, биологич. ф-т, 2002) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$(x^2 + 2(a-2)x + a^2 - 4a)^2 + (a+5)(x^2 + 2(a-2)x + a^2 - 4a) - a^2 + 8a + 2 = 0$$

имеет: а) единственное решение; б) ровно два различных решения.

$$\boxed{(\infty+; \sqrt{2}+2) \cap \{1\} \cap (\sqrt{2}-2; \infty-) \ni v \text{ (} \sqrt{2}+2 = v \text{ (} v}$$

52. (МГУ, химический ф-т, 2001) Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} x^3 - (a + 3)x^2 + (3a + 2)x - 2a \geq 0, \\ x^3 - (a + 3)x^2 + 3ax \leq 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

3 < a

53. (МГУ, ф-т психологии, 2001) При каждом a решить неравенство

$$ax^4 + x^3 + (2a + 3a^3)x^2 + 2x + 6a^3 > 0.$$

Если $a \leq -\sqrt[4]{\frac{1}{12}}$, то решение нет; если $a \in \left(0; -\sqrt[4]{\frac{1}{12}}\right)$, то $x \in \left(-\sqrt[4]{\frac{2}{1-12a^4}}; \frac{2}{1-12a^4}\right)$; если $a = 0$, то $x > 0$;
Если $a \in \left[\sqrt[4]{\frac{1}{12}}; 0\right)$, то $x \in \left(-\sqrt[4]{\frac{2}{1-12a^4}}; \infty\right) \cap \left(\frac{2}{1-12a^4}; \infty\right)$; если $a > \sqrt[4]{\frac{1}{12}}$, то $x \in \left(\frac{2}{1-12a^4}; \infty\right)$