Минимаксные задачи с параметрами

Данная статья служит продолжением статьи «Минимаксные задачи. 1», в которой были изложены основные идеи. Здесь мы разберём несколько задач и посмотрим, как минимаксные методы работают в задачах с параметрами.

Задача 1. (*МГУ, геологич. ф-т, 1990*) Найти все пары действительных чисел a и b, при которых уравнение

$$\left(3x - a^2 + ab - b^2\right)^2 + \left(2x^2 - a^2 - ab\right)^2 + x^2 + 9 = 6x$$

имеет хотя бы одно решение x.

Решение. Перепишем уравнение в виде:

$$\left(3x - a^2 + ab - b^2\right)^2 + \left(2x^2 - a^2 - ab\right)^2 + (x-3)^2 = 0.$$

Сумма квадратов, будучи неотрицательной, равна нулю тогда и только тогда, когда каждое слагаемое обращается в нуль. Таким образом, наше уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 3x - a^2 + ab - b^2 = 0, \\ 2x^2 - a^2 - ab = 0, \\ x - 3 = 0. \end{cases}$$

Из третьего уравнения имеем $x = 3$; подставляя это значение в первое и второе уравнения, получим систему

$$\begin{cases} a^2 - ab + b^2 = 9, \\ a^2 + ab = 18. \end{cases} \tag{1}$$

Умножим первое уравнение системы (1) на -2 и сложим со вторым уравнением. Придём к уравнению

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0,$$

то есть

$$(a-b)(a-2b) = 0.$$

Отсюда $a = b$ или $a = 2b$. Подставляя это в любое из уравнений системы (1) (проще во второе), найдём в итоге искомые пары (a, b).

Ответ: $(3, 3)$, $(-3, -3)$, $\left(2\sqrt{3}, \sqrt{3}\,\right)$, $\left(-2\sqrt{3}, -\sqrt{3}\,\right)$.

Задача 2. (*МГУ, ф-т почвоведения, 1983*) Найти все значения α, которые удовлетворяют условию $5 < \alpha < 16$ и при которых уравнение

$$1 + \cos^2\left(\frac{\alpha x}{2} + \frac{3\pi}{8}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{|\cos\pi x - \sin\pi x|}$$

относительно x имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условию $1 \leqslant x \leqslant 2$.

Решение. Поскольку выполнены неравенства

$$1 + \cos^2\left(\frac{\alpha x}{2} + \frac{3\pi}{8}\right) \geqslant 1, \qquad \left(\frac{1}{3}\right)^{|\cos\pi x - \sin\pi x|} \leqslant 1,$$

наше уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 1+\cos^2\left(\dfrac{\alpha x}{2}+\dfrac{3\pi}{8}\right)=1, \\ \left(\dfrac{1}{3}\right)^{|\cos\pi x-\sin\pi x|}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\alpha x}{2}+\dfrac{3\pi}{8}=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}, \\ \cos\pi x-\sin\pi x=0. \end{cases}$$

Из второго уравнения легко находим: $\pi x=\frac{\pi}{4}+\pi k$ ($k\in\mathbb{Z}$), то есть $x=\frac{1}{4}+k$. По условию должно быть выполнено двойное неравенство $1\leqslant x\leqslant 2$; следовательно, подходит единственное значение $k=1$, при котором $x=\frac{5}{4}$.

Подставляя $x=\frac{5}{4}$ в первое уравнение системы, получим

$$\alpha=\frac{\pi(1+8n)}{5}.$$

По условию должно быть $5<\alpha<16$; значит, годятся значения $n=1,2,3$. В самом деле:

$$\begin{aligned} n\leqslant 0 \quad &\Rightarrow \quad \alpha\leqslant\frac{\pi}{5}<1<5; \\ n=1 \quad &\Rightarrow \quad \alpha=\frac{9\pi}{5}>\frac{9\cdot 3}{5}>5; \\ n=3 \quad &\Rightarrow \quad \alpha=5\pi<5\cdot 3{,}2=16; \\ n\geqslant 4 \quad &\Rightarrow \quad \alpha\geqslant\frac{33\pi}{5}>\frac{33\cdot 3}{5}>16. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{9\pi}{5}$, $\frac{17\pi}{5}$, 5π.

Задача 3. (*МГУ, ф-т психологии, 1988*) Найдите наибольшее значение параметра a, при котором неравенство

$$a\sqrt{a}(x^2-2x+1)+\frac{\sqrt{a}}{x^2-2x+1}\leqslant\sqrt[4]{a^3}\cdot\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение. Для удобства сделаем замену $b=\sqrt[4]{a}$. Тогда неравенство примет вид

$$b^6(x-1)^2+\frac{b^2}{(x-1)^2}\leqslant b^3\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|. \tag{2}$$

Если $b=0$, то любое значение $x\neq 1$ является решением неравенства (2), поэтому $b=0$ годится. Теперь надо выяснить, существуют ли $b>0$, при которых неравенство (2) имеет решения. В предположении $b>0$ делим обе части неравенства (2) на b^3:

$$b^3(x-1)^2+\frac{1}{b(x-1)^2}\leqslant\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|. \tag{3}$$

В силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим имеем оценку снизу для левой части неравенства (3):

$$b^3(x-1)^2+\frac{1}{b(x-1)^2}\geqslant 2\cdot\sqrt{b^3(x-1)^2\cdot\frac{1}{b(x-1)^2}}=2b.$$

Вместе с тем для правой части неравенства (3) имеем очевидную оценку сверху: $\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|\leqslant 1$. Поэтому если $2b>1$, то неравенство (3) не имеет решений; значит, неравенство (3) может иметь решения лишь при условии $2b\leqslant 1$, то есть при $b\leqslant\frac{1}{2}$.

Покажем, что при $b=\frac{1}{2}$ неравенство (3) имеет решения. С этим b оно примет вид

$$\frac{1}{8}(x-1)^2+\frac{2}{(x-1)^2}\leqslant\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|. \tag{4}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что при $x=3$ неравенство (4) выполнено[1]. Итак, наибольшее значение b равно $\frac{1}{2}$, и потому искомое наибольшее значение a равно $\frac{1}{16}$.

Ответ: $\frac{1}{16}$.

Задача 4. (*МГУ, филологич. ф-т, 1985*) Для каждого значения a решить уравнение

$$4\cos x\sin a+2\sin x\cos a-3\cos a=2\sqrt{7}.$$

Решение. Здесь работает идея, которая обсуждалась в листке «Параметр как переменная». Мы меняем ролями величины x и a, воспринимая наше уравнение как уравнение относительно переменной a с параметром x.

Переписываем уравнение в следующем виде:

$$A\sin a+B\cos a=2\sqrt{7}, \tag{5}$$

где

$$A=4\cos x,\quad B=2\sin x-3.$$

Замечая, что $B\neq0$ при любом x, преобразуем[2] уравнение (5):

$$\sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin a+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos a\right)=2\sqrt{7}.$$

Поскольку

$$\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2+\left(\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2=1,$$

существует угол φ такой, что

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}=\cos\varphi,\quad \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}=\sin\varphi.$$

Тем самым уравнение (5) приобретает вид:

$$\sqrt{A^2+B^2}(\sin a\cos\varphi+\cos a\sin\varphi)=2\sqrt{7},$$

то есть

$$\sqrt{A^2+B^2}\sin(a+\varphi)=2\sqrt{7}. \tag{6}$$

Пусть

$$L=\sqrt{A^2+B^2}\sin(a+\varphi)$$

есть левая часть уравнения (6). Для L имеем оценку сверху:

$$L\leqslant\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{(4\cos x)^2+(2\sin x-3)^2}=\sqrt{16\cos^2x+4\sin^2x-12\sin x+9}.$$

[1] Мы не обязаны объяснять на экзамене, откуда взялся пример $x=3$. Но всё же, из каких соображений он найден? Правая часть неравенства (4) не превосходит 1, а в силу неравенства между средними левая часть (4) не меньше 1. Следовательно, неравенство (4) может быть выполнено лишь в случае равенства, которое достигается при равенстве слагаемых в левой части.

[2] Это метод вспомогательного аргумента, изложенный в статье «Тригонометрические уравнения. 2».

Используя основное тригонометрическое тождество $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, получаем:

$$L \leqslant \sqrt{25 - 12\sin^2 x - 12\sin x}\,.$$

В подкоренном выражении выделим полный квадрат:

$$25 - 12\sin^2 x - 12\sin x = 25 - 3(4\sin^2 x + 4\sin x + 1 - 1) = 28 - 3(2\sin x + 1)^2.$$

Таким образом, имеем:

$$L \leqslant \sqrt{28 - 3(2\sin x + 1)^2} \leqslant \sqrt{28} = 2\sqrt{7}\,. \tag{7}$$

Сопоставляя эту оценку с уравнением (6), мы видим, что это уравнение может иметь решения относительно a лишь в том случае, когда в неравенстве (7) достигается равенство, то есть при $\sin x = -\frac{1}{2}$. Имеем, стало быть, два случая.

1. $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда $A = 2\sqrt{3}$, $B = -4$, и уравнение (5) принимает вид:

   $$\sqrt{3}\sin a - 2\cos a = \sqrt{7}\,,$$

   или

   $$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\sin a - \frac{2}{\sqrt{7}}\cos a = 1. \tag{8}$$

   Поскольку $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2 = 1$, существует такой угол φ, что

   $$\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}, \quad \sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{7}}\,;$$

   при этом можно выбрать φ на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, так что $\varphi = \arcsin\frac{2}{\sqrt{7}}$. Уравнение (8) теперь даёт нам:

   $$\sin a\cos\varphi - \cos a\sin\varphi = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(a - \varphi) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a - \varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,$$

   то есть

   $$a = \frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{2}{\sqrt{7}} + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

2. $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда $A = -2\sqrt{3}$, $B = -4$, и уравнение (5) принимает вид:

   $$-\sqrt{3}\sin a - 2\cos a = \sqrt{7}\,,$$

   или

   $$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\sin a + \frac{2}{\sqrt{7}}\cos a = -1.$$

   Дальше действуем аналогично и получаем

   $$a = -\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{2}{\sqrt{7}} + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Остаётся записать ответ.

Ответ: Если $a = \frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{2}{\sqrt{7}} + 2\pi k$, то $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$; если $a = -\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{2}{\sqrt{7}} + 2\pi k$, то $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ $(k, n \in \mathbb{Z})$; при остальных a решений нет.

Задачи

1. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2019*) При каких значениях $n = 1, 2, \ldots, 9$ уравнение

$$\left(\log_2^2 \sin\left(\pi x + \frac{7\pi n}{6}\right) + \log_2 \sin\left(\pi x + \frac{7\pi n}{6}\right) + 0{,}5\right) \cdot \\ \cdot \log_2\left(9 \cdot 3^{4x^2-6x} - 2 \cdot 3^{2x^2-3x+2} + 17\right) = 3\log_2 \sin\left(\pi x + \frac{7\pi n}{6}\right) + 1{,}5$$

имеет решение?

$\boxed{\{6, 9\}}$

2. (*МГУ, геологич. ф-т, 1990*) Найти все пары (a, b), при которых уравнение

$$\left(3x^2 - 2a^2 + ab\right)^2 + \left(3a^2 - ab + 2b^2 - 12x\right)^2 + 4 = 4x - x^2$$

имеет хотя бы один корень.

$\boxed{(2, -2),\ (-2, 2),\ \left(2\sqrt{2}, \sqrt{2}\right),\ \left(-2\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)}$

3. (*МГУ, физический ф-т, 1996*) При каждом a решить уравнение

$$(\log_2 3)^{\sqrt{x+a+2}} = (\log_9 4)^{\sqrt{x^2+a^2-6a-5}}.$$

Если $a = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$, то $x = \frac{-5+\sqrt{3}}{2}$; если $a = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, то $x = \frac{-5-\sqrt{3}}{2}$; при остальных a решений нет

4. (*МГУ, ИСАА, 1994*) Найти все a, при которых уравнение

$$a^2x^2 + 2a\left(\sqrt{2} - 1\right)x + \sqrt{x - 2} = 2\sqrt{2} - 3$$

имеет хотя бы один корень.

$\boxed{a = \frac{1-\sqrt{2}}{2}}$

5. (*МГУ, физический ф-т, 2001*) При каждом α найти все корни уравнения

$$\cos 2x + 2\sin^2(x + \alpha) + 2 = \sin\alpha,$$

принадлежащие отрезку $[\pi; 2\pi]$.

Если $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$), то $x = \frac{3\pi}{2}$; при остальных α решений нет

6. (*МГУ, мехмат, 1993*) Найти все $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, при которых уравнение

$$\sqrt{2\cos(x + \alpha) - 1} = \sin 6x - 1$$

имеет хотя бы один корень.

$\boxed{\alpha = -\frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}}$

7. (*МГУ, химический ф-т, 2001*) При каждом a решить уравнение

$$\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x - 2a(\sin x + \sin 2x + \sin 3x) + \cos x - \cos 3x + 2a^2 = 0.$$

Если $a = 0$, то $x = \pi + 2\pi n$ или $x = \frac{2\pi n}{3}$ $(n \in \mathbb{Z})$; если $a \neq 0$, то решений нет

8. (*МГУ, ВМК, 1981*) При каждом a решить уравнение

$$\left(1 + (a+2)^2\right)\log_3(2x - x^2) + \left(1 + (3a-1)^2\right)\log_{11}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = \log_3(2x - x^2) + \log_{11}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right).$$

Если $a = \frac{1}{3}$, то $x = 1$; при остальных a решений нет

9. (*МГУ, ВМК, 1989*) Найти все a, при которых уравнение

$$\log_{\frac{1}{\pi}} \frac{a^2 + 4\pi^2 + 4}{4x - x^2 - 2(a - 2\pi)|x - 2| + 4\pi a} = \sqrt{(x - 5a + 10\pi - 34)\left(|\pi - x| - a + \pi + 2\right)}$$

имеет хотя бы один целочисленный корень.

$a \in \{2\pi - 8, 2\pi - 1, 2\pi\}$

10. (*МГУ, геологич. ф-т, 1995*) При каждом a решить систему

$$\begin{cases} x \leqslant 1, \\ \dfrac{\log_2\left(|a|x^2 - 3x + 4\right)}{\log_2(-3x + 4)} = 5^{-|x|(x+1)^2}. \end{cases}$$

Если $a \neq 0$, то $x = 0$; если $a = 0$, то $x = 0, -1$

11. (*МГУ, геологич. ф-т, 1998*) Найти все a, при которых уравнение

$$\left|\frac{x^2 - 4ax + 4a^2 + 1}{x - 2a}\right| + x^2 - 2x - 1 = 0$$

имеет хотя бы один корень.

$a = 0$ или $a = 1$

12. (*МГУ, ф-т почвоведения, 1983*) Найти все $a \in (2; 5)$, при которых уравнение

$$\log_2\left(3 - |\sin ax|\right) = \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right)$$

имеет хотя бы один корень на отрезке $[2; 3]$.

$a = \frac{9\pi}{13}, \frac{15\pi}{13}$

13. (*МГУ, филологич. ф-т, 1985*) Для каждого a решить уравнение

$$3\cos x \sin a - \sin x \cos a - 4\cos a = 3\sqrt{3}\,.$$

Если $a = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, то $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$; если $a = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, то $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ $(k, n \in \mathbb{Z})$; при остальных a решений нет

14. (*МГУ, ф-т психологии, 1988*) Найти наибольшее a, при котором неравенство

$$\sqrt{a^5}(8x-x^2-16)+\frac{\sqrt{a}}{8x-x^2-16}\geqslant -\frac{2}{3}a|\cos\pi x|$$

имеет хотя бы одно решение.

$\boxed{\frac{1}{9}}$

15. (*МГУ, ФНМ, 2004*) Найти все b, при каждом из которых неравенство

$$\left(3-2\sqrt{2}\right)^x+(b^4+12-6b^2)\cdot\left(3+2\sqrt{2}\right)^x+9^t+\frac{b^2}{4}+b\cdot 3^t-\sqrt{12}\leqslant 0$$

имеет хотя бы одно решение (t,x).

$\boxed{b=-\sqrt{3}}$

16. (*МГУ, ФНМ, 2002*) Найти все a, при каждом из которых неравенство

$$4^x+4^{-x}+8\left|2^x+2^{-x}-a\right|+11a<26+2a\left(2^x+2^{-x}\right)$$

имеет хотя бы одно решение.

$\boxed{a\in(-8;-4)\cup(7;+\infty)}$

17. (*МГУ, ф-т почвоведения, 1994*) Найти все пары (a,b), при которых система

$$\begin{cases} a+\sin bx\leqslant 1,\\ x^2+ax+1\leqslant 0\end{cases}$$

имеет единственное решение.

$\boxed{a=2,\ b=\frac{\pi}{2}+2\pi n\ (n\in\mathbb{Z});\ a=-2,\ b\in\mathbb{R}}$

18. (*МГУ, географич. ф-т, 1986*) Для каждого значения параметра a, удовлетворяющего неравенствам $0<a<2$, найдите наименьшее значение выражения

$$x^2+y^2-2a(x+y)$$

при условии $\cos\frac{\pi xy}{2}=1$.

Если $a\in\left(0;4-2\sqrt{2}\right]$, то наименьшее значение равно $-a^2$; если $a\in\left(4-2\sqrt{2};2\right)$, то наименьшее значение равно $8-8a$

19. (*МГУ, географич. ф-т, 1985*) Найдите все числа a, удовлетворяющие условию $-1<a<1$, для которых выражение

$$1+2\sqrt{x^2-2axy+y^2-6y+10}$$

принимает наименьшее значение лишь при одной паре чисел (x,y).

$\boxed{a\in\left[-\frac{1}{\sqrt{10}};\frac{1}{\sqrt{10}}\right]}$

20. (*МГУ, ф-т почвоведения, 1988*) Найти все значения параметра p, при каждом из которых существует единственная пара чисел (x, y), удовлетворяющая условиям

$$\begin{cases} x^2 + 2px + 3p^2 + 3p + 3 \leqslant 3\sin y - 4\cos y, \\ 0 \leqslant y \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

$p = -2$ или $p = \frac{1}{2}$

21. (*МГУ, экономический ф-т, 2004*) Найти наибольшее значение ω, при котором имеет решение система

$$\begin{cases} 4\sin^2 y - \omega = 16\sin^2 \dfrac{2x}{7} + 9\operatorname{ctg}^2 \dfrac{2x}{7}, \\ \left(\pi^2\cos^2 3x - 2\pi^2 - 72\right) y^2 = 2\pi^2(1 + y^2)\sin 3x. \end{cases}$$

-14

22. (*МГУ, ВМК, 1999*) При каких a уравнение

$$3^{x^2+2ax+4a-3} - 2 = \left|\frac{a-2}{x+a}\right|$$

имеет ровно два корня, лежащих на отрезке $[-4; 0]$?

$a \in [1; 2) \cup (2; 3]$

23. (*МГУ, географич. ф-т, 1999*) При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} y^2 - (2a+1)y + a^2 + a - 2 = 0, \\ \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + \sqrt{(x-a)^2 + (y-3)^2} = 3 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

$[-2; 1) \cup (1; 4]$

24. (*МГУ, химический ф-т, 1994*) При каких q разрешима система

$$\begin{cases} x^2 + qx + 3 = 0, \\ \sin^2 q\pi + \cos^2 \dfrac{\pi x}{2} + 2^{y^2} = \sin \dfrac{\pi x}{2}\ ? \end{cases}$$

Найдите её решения.

Система разрешима при $q = \pm 4$. Если $q = 4$, то $x = -3$, $y = 0$; если $q = -4$, то $x = 1$, $y = 0$

25. (*МГУ, мехмат, 1978*) Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 \geqslant \dfrac{1-a}{a+1}, \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 \leqslant -2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

$a < -1$

26. (*МГУ, мехмат, 1995*) Найти все $\alpha \in [0; 2\pi]$, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2z(x+y+z) - \sin\alpha = 0, \\ (x+1)\sin^2\dfrac{\alpha}{2} + y^2\sqrt{x} + \alpha^2\sqrt{z} + \sin\dfrac{3\alpha}{2} = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

$\boxed{\alpha \in \{0, \pi, 2\pi\}}$

27. (*МГУ, мехмат, 1988*) Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{1}{z^2}\,, \\ \cos x \cos y = -\dfrac{(x+y)^2}{(a-\pi)^2}\,, \\ 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2}\,, \\ z > 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$\boxed{a \in [-2\pi; 0) \cup (2\pi; 4\pi]}$

28. (*МГУ, биологич. ф-т, 2003*) Найти все значения b, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \left(\log_b f(x) - 1\right)^2 + \left(y^2 - 5\cdot 10^3 \cdot y + 2b\right)^2 = 0, \\ z^2 - \left(b - 2\cdot 10^6\right)\cdot z + 25\cdot 10^{10} = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, где

$$f(x) = |x| + \left|x - 1^2\right| + \left|x - 2^2\right| + \ldots + \left|x - 104^2\right|.$$

$\boxed{b \in [286624; 1000000] \cup [3000000; 3125000]}$

29. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11*) При каждом значении a решите уравнение

$$|x-1| + |x+1| + |x-2| + |x+2| + |x-3| + |x+3| + \ldots + |x-2015| + |x+2015| + \\ + 2x^2 + 2a^2 + 4030^2 - 8060x - 8060a = 4030x.$$

$\boxed{\text{Если } a = 2015, \text{ то } x = 2015; \text{ если } a \neq 2015, \text{ то решений нет}}$