

Параметры. Уравнения высших порядков

Задача 1. («Ломоносов», 2011, 10–11) При каких значениях a , b и c множество действительных корней уравнения

$$x^5 + 2x^4 + ax^2 + b = cx \quad (1)$$

состоит в точности из чисел -1 и 1 ?

Решение. Число $x = 1$ является корнем уравнения (1) в том и только в том случае, если выполнено равенство

$$3 + a + b = c. \quad (2)$$

Аналогично, $x = -1$ является корнем уравнения (1) тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$1 + a + b = -c. \quad (3)$$

Вычитая из равенства (2) равенство (3), получим $c = 1$. Тогда любое из этих равенств приводит к соотношению $b = -a - 2$. В итоге уравнение (1) принимает вид

$$x^5 + 2x^4 + ax^2 - x - a - 2 = 0. \quad (4)$$

Как мы уже знаем, уравнение (4) имеет корни ± 1 , поэтому выделяем множитель $x^2 - 1$:

$$\begin{aligned} x^5 + 2x^4 + ax^2 - x - a - 2 &= \\ &= (x^5 - x^3) + (x^3 - x) + (2x^4 - 2x^2) + (2x^2 - 2) + (ax^2 - a) = (x^2 - 1)(x^3 + 2x^2 + x + a + 2). \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (4) имеет вид

$$(x^2 - 1)(x^3 + 2x^2 + x + a + 2) = 0.$$

Множество корней данного уравнения состоит из чисел ± 1 и корней уравнения

$$x^3 + 2x^2 + x + a + 2 = 0. \quad (5)$$

При любом a уравнение (5) имеет хотя бы один корень, поскольку функция $y = x^3 + 2x^2 + x + a + 2$ является непрерывной, принимает отрицательные значения при $x \rightarrow -\infty$ и положительные — при $x \rightarrow +\infty$, и, стало быть, при некотором x обращается в нуль. Нам нужно, чтобы корни уравнения (5) не отличались от ± 1 .

Если $x = 1$ является корнем уравнения (5), то выполнено

$$4 + a + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -6.$$

Это необходимое условие на параметр a ; проверим его достаточность¹. Подставляем $a = -6$ в уравнение (5):

$$x^3 + 2x^2 + x - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 1)(x^2 + 3x + 4) = 0.$$

Квадратный трёхчлен $x^2 + 3x + 4$ не имеет корней, так что $x = 1$ — единственный корень уравнения (5). Следовательно, в случае $a = -6$ (и соответственно $b = 4$, $c = 1$) корни уравнения (1) в самом деле образуют множество $\{-1, 1\}$.

¹О понятиях необходимости и достаточности рассказано в статье «[Необходимые и достаточные условия](#)».

Если же $x = -1$ является корнем уравнения (5), то выполнено

$$a + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -2.$$

При таком a уравнение (5) принимает вид

$$x^3 + 2x^2 + x = 0$$

и имеет корень $x = 0$ (который соответственно является корнем исходного уравнения (1)). Поэтому значение $a = -2$ нам не подходит.

Ответ: $a = -6$, $b = 4$, $c = 1$.

Задача 2. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых среди решений уравнения

$$(a^4 + 2014a^3 + 2014a^2 + 2014a + 2013)x = a^3 + 3a^2 - 6a - 8 \quad (6)$$

есть неотрицательные числа.

Решение. Многочлен $a^4 + 2014a^3 + 2014a^2 + 2014a + 2013$ имеет корень $a = -1$ и раскладывается на множители:

$$a^4 + 2014a^3 + 2014a^2 + 2014a + 2013 = (a + 1)(a^3 + 2013a^2 + a + 2013).$$

Кубический многочлен в скобках раскладывается на множители непосредственной группировкой:

$$a^3 + 2013a^2 + a + 2013 = (a^2 + 1)(a + 2013).$$

Аналогично раскладывается на множители и правая часть уравнения (6):

$$a^3 + 3a^2 - 6a - 8 = (a^3 - 8) + 3a(a - 2) = (a - 2)(a^2 + 5a + 4) = (a - 2)(a + 1)(a + 4).$$

Таким образом, уравнение (6) эквивалентно уравнению

$$(a + 1)(a^2 + 1)(a + 2013)x = (a - 2)(a + 1)(a + 4). \quad (7)$$

Если $a = -1$, то уравнение (7) принимает вид $0 \cdot x = 0$. Решением такого уравнения является любое число (в частности, неотрицательное). Поэтому значение $a = -1$ годится.

Если $a = -2013$, то уравнение (7) принимает вид $0 \cdot x = -2015 \cdot 2012 \cdot 2009$. Такое уравнение не имеет корней. Значит, данное значение a не подходит.

Если $a \neq -1$ и $a \neq -2013$, то уравнение (7) имеет единственное решение

$$x = \frac{(a - 2)(a + 4)}{(a^2 + 1)(a + 2013)}.$$

Остаётся найти все те значения a , при которых выполнено неравенство

$$\frac{(a - 2)(a + 4)}{(a^2 + 1)(a + 2013)} \geq 0.$$

Это легко делается методом интервалов.

Ответ: $(-2013; -4] \cup \{-1\} \cup [2; +\infty)$.

Задача 3. (МГУ, социологич. ф-т, 2003) Определите все значения параметра a , при каждом из которых три различных корня уравнения

$$x^3 + (a^2 - 15a)x^2 + 12ax - 216 = 0 \quad (8)$$

образуют геометрическую прогрессию. Найдите эти корни.

Решение. Запишем [формулы Виета](#) для уравнения (8):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 15a - a^2, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 12a, \\ x_1x_2x_3 = 216. \end{cases} \quad (9)$$

Числа x_1 , x_2 и x_3 (в указанном порядке) образуют геометрическую прогрессию тогда и только тогда, когда выполнено равенство $x_2^2 = x_1x_3$ (см. статью «[Геометрическая прогрессия](#)»). В таком случае из третьего уравнения системы (9) находим $x_2^3 = 216$, то есть $x_2 = 6$, и тогда $x_1x_3 = 36$. Подставляя это в первые два уравнения (9), получим:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 15a - a^2 - 6, \\ 6(x_1 + x_2) = 12a - 36, \end{cases}$$

откуда

$$15a - a^2 - 6 = 2a - 6 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - 13a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \text{ или } a = 13.$$

Мы получили *необходимое* условие на параметр a : именно, предположив, что корни образуют геометрическую прогрессию, мы пришли к выводу, что a может принимать лишь значения 0 или 13 (и никакие другие). Но пока не факт, что оба полученных значения годятся, и теперь надо проверить *достаточность*: при каком из этих значений a имеются три различных корня, образующих геометрическую прогрессию.

Если $a = 0$, то уравнение (8) принимает вид $x^3 - 216 = 0$; это уравнение имеет единственный корень $x = 6$. Поэтому значение $a = 0$ не годится.

Если $a = 13$, то уравнение (8) принимает вид

$$x^3 - 26x^2 + 156x - 216 = 0.$$

Знание корня $x = 6$ облегчает разложение на множители:

$$\begin{aligned} 0 &= (x^3 - 216) - (26x^2 - 156) = (x - 6)(x^2 + 6x + 36) - 26(x - 6) = \\ &= (x - 6)(x^2 - 20x + 36) = (x - 6)(x - 2)(x - 18). \end{aligned}$$

Как видим, уравнение имеет три различных корня 2, 6 и 18, которые образуют геометрическую прогрессию. Следовательно, значение $a = 13$ нам подходит.

Ответ: $a = 13$; корни 2, 6, 18.

Задачи

1. («*Покори Воробьёвы горы!*», 2019, 9.6) Решите уравнение

$$x^3 - 3abx = a^3 + b^3$$

при всех значениях параметров a , b . В ответе укажите сумму корней уравнения, получающегося при $a = 2018$, $b = -2019$, или 0, если это уравнение не имеет корней.

□

2. («*Физтех*», 2023, 10) Уравнение $25x^3 - 120x^2 + 156x + a = 0$ имеет три различных корня, которые образуют арифметическую прогрессию. Найдите все возможные значения параметра a . Если их несколько, в ответ запишите наибольшее из них.

□

3. («Физтех», 2023, 11) Уравнение $x^3 + 7x^2 - 42x + a = 0$ имеет три различных корня, которые образуют геометрическую прогрессию. Найдите все возможные значения параметра a . Если их несколько, в ответ запишите наибольшее из них.

912-

4. («Ломоносов», 2011, 10–11.6) При каких значениях a, b и c множество действительных корней уравнения

$$x^5 + 2x^4 + ax^2 + bx = c$$

состоит в точности из чисел -1 и 1 ?

7- = 2, 1- = 9, 9- = 2

5. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11.3) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых среди решений уравнения

$$(a^4 - 2014a^3 + 2014a^2 - 2014a + 2013)x = a^3 + 5a^2 + 2a - 8$$

есть неотрицательные числа.

(∞+; 2013] ∩ {1} ∩ [2; 4-]

6. («Покори Воробьёвы горы!», 2011, 10–11.5) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^3 - ax^2 - (a^3 - 6a^2 + 5a + 8)x - (a - 3)^3 = 0$$

имеет три различных корня, образующих геометрическую прогрессию (укажите эти корни).

{ $\frac{2}{3\sqrt{3}+3}, 1, \frac{2}{3\sqrt{3}-3}$ } ∩ x ол, 4, 2 = 2, 2, 2 = 2 или ∅; { $\frac{2}{3\sqrt{3}+3}, 1, \frac{2}{3\sqrt{3}-3}$ } ∩ x ол, 2 = 2, 2, 2 = 2

7. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 10–11.4) Найдите все целочисленные значения a, b, c такие, что существуют три различных корня уравнения

$$x^3 + (8 + b)x^2 + (b + 4)x + (c + 3) = 0,$$

которые являются корнями уравнения

$$x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

9- = 2, 5- = 9, 5 = 2

8. (ОММО, 2020.7) При каких значениях параметра a уравнение $x^3 - 11x^2 + ax - 8 = 0$ имеет три различных действительных корня, образующих геометрическую прогрессию?

22 = 2

9. (МГУ, социологич. ф-т, 2003.6) Определите все значения параметра a , при каждом из которых три различных корня уравнения

$$x^3 + (a^2 - 9a)x^2 + 8ax - 64 = 0$$

образуют геометрическую прогрессию. Найдите эти корни.

8, 2, 4, 8 = 2

10. (ОММО, 2016.8) При каких значениях параметра a уравнение

$$x^3 + ax^2 + 13x - 6 = 0$$

имеет единственное решение?

$$\left(\frac{8}{19}; \frac{8}{07} -\right) \cap (8 - ; \infty -)$$