Остатки и сравнения

Содержание

Определение. Разделить целое число a на целое число $b \neq 0$ с остатком — это значит представить число a в виде $a = kb + r$, где $0 \leqslant r < |b|$. При этом k называется частным, а r — остатком от деления a на b.

0.1. Найдите все возможные остатки от деления квадрата целого числа:

а) на 3; б) на 4; в) на 5.

Объясните, почему число $100\ldots04$ не может быть квадратом целого числа.

а) 0 и 1; б) 0 и 1; в) 0, 1 и 4.

Определение. Запись $a \equiv b \pmod{m}$ означает, что числа a и b имеют одинаковые остатки при делении на m. Читается так: a сравнимо с b по модулю m.

0.2. Докажите, что $a \equiv b \pmod{m}$ тогда и только тогда, когда $a - b$ делится на m.

0.3. (*Свойства сравнений*) Пусть $a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m}$. Докажите, что:

- $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ — сравнения по одному и тому же модулю можно складывать друг с другом;
- $ac \equiv bd \pmod{m}$ — сравнения по одному и тому же модулю можно умножать друг на друга;
- $a^n \equiv b^n \pmod{m}$, $n \in \mathbb{N}$ — сравнение можно возвести в любую натуральную степень;
- $ka \equiv kb \pmod{m}$, $k \in \mathbb{Z}$ — сравнение можно умножить на любое целое число.

0.4. Найдите остаток от деления: а) 5^{20} на 24; б) 3^{66} на 28.

а) 1; б) 1

0.5. Докажите, что $16^{2014} + 33^{2015}$ делится на 17.

0.6. При каких натуральных n число $2^n - 1$ делится на 7?

$\boxed{\text{При } n = 3k,\ k \in \mathbb{N}}$

0.7. Докажите, что при любом натуральном n число $37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n$ делится на 7.

0.8. Докажите, что:
а) $\overline{a_1a_2\ldots a_n} \equiv a_1 + a_2 + \ldots + a_n \pmod 9$;
б) $\overline{a_1a_2\ldots a_{n-1}a_n} \equiv a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1}a_1 \pmod{11}$.
Выведите отсюда признаки деления на 9 и 11.

0.9. (*Моск. матем. регата, 2012, 9*) Делится ли число $21^{10} - 1$ на 2200?

$\boxed{\text{Да}}$

1 Всероссийская олимпиада школьников по математике

1.1. [Vse — 2015.M.10.1] Если разделить 2014 на 105, то в частном получится 19 и в остатке тоже 19. На какие ещё натуральные числа можно разделить 2014, чтобы частное и остаток совпали? (*Укажите все возможные варианты и докажите, что других нет.*)

$\boxed{\text{На 52, 1006 и 2013}}$

1.2. [Vse — 1997.R.8.7] Найдите все такие пары простых чисел p и q, что $p^3 - q^5 = (p+q)^2$.

1.3. [Vse — 2014.R.9.1] Даны 111 различных натуральных чисел, не превосходящих 500. Могло ли оказаться, что для каждого из этих чисел его последняя цифра совпадает с последней цифрой суммы всех остальных чисел?

1.4. [Vse — 2002.R.9.5] Можно ли расставить по кругу числа 1, 2, …, 60 в таком порядке, чтобы сумма каждых двух чисел, между которыми находится одно число, делилась на 2, сумма каждых двух чисел, между которыми находятся два числа, делилась на 3, …, сумма каждых двух чисел, между которыми находятся шесть чисел, делилась на 7?

1.5. [Vse — 2008.R.9.5] Дано натуральное число $n > 1$. Для каждого делителя d числа $n+1$ Петя разделил число n на d с остатком и записал на доску неполное частное, а в тетрадь — остаток. Докажите, что наборы чисел на доске и в тетради совпадают.

1.6. [Vse — 2019.R.9.3] По кругу расставлены 100 различных натуральных чисел. Вася разделил каждое из них с остатком на следующее по часовой стрелке; при этом оказалось, что остатки, полученный Васей, принимают всего два различных значения. Петя разделил каждое из чисел с остатком на следующее против часовой стрелки. Докажите, что все остатки, полученные Петей, различны.

1.7. [Vse — 2014.F.9.1] По кругу расставлены 99 натуральных чисел. Известно, что каждые два соседних числа отличаются или на 1, или на 2, или в два раза. Докажите, что хотя бы одно из этих чисел делится на 3.

1.8. [Vse — 1993.F.9.5;10.5] Целые числа x, y и z таковы, что

$$(x-y)(y-z)(z-x) = x+y+z.$$

Докажите, что число $x+y+z$ делится на 27.

1.9. [Vse — 2011.F.9.5] Для некоторых 2011 натуральных чисел выписали на доску все их $2011 \cdot 1005$ попарных сумм. Могло ли оказаться, что ровно треть выписанных сумм делится на 3, и ещё ровно треть из них дают остаток 1 при делении на 3?

1.10. [Vse — 2012.F.9.1] Пусть a_1, a_2, …, a_{11} — различные натуральные числа, не меньшие 2, сумма которых равна 407. Может ли сумма остатков от деления некоторого натурального числа n на 22 числа a_1, a_2, …, a_{11}, $4a_1$, $4a_2$, …, $4a_{11}$ равняться 2012?

1.11. [Vse — 2019.F.9.2] При каком наименьшем натуральном n существуют такие целые a_1, a_2, …, a_n, что квадратный трёхчлен

$$x^2 - 2(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 x + \left(a_1^4 + a_2^4 + ... + a_n^4 + 1\right)$$

имеет по крайней мере один целый корень?

1.12. [Vse — 2018.F.9.6;10.6] Даны натуральные числа a и b. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что число $a^n + 1$ **не** делится на $n^b + 1$.

1.13. [Vse — 2002.R.10.1] Какова наибольшая длина арифметической прогрессии из натуральных чисел a_1, a_2, …, a_n с разностью 2, обладающей свойством: $a_k^2 + 1$ — простое при всех $k = 1, 2, \ldots, n$?

1.14. [Vse — 1997.R.10.3] Даны натуральные числа m и n. Докажите, что число $2^n - 1$ делится на число $(2^m - 1)^2$ тогда и только тогда, когда число n делится на число $m(2^m - 1)$.

1.15. [Vse — 2012.F.10.1] Пусть a_1, a_2, …, a_{10} — различные натуральные числа, не меньшие 3, сумма которых равна 678. Может ли сумма остатков от деления некоторого натурального числа n на 20 чисел a_1, a_2, …, a_{10}, $2a_1$, $2a_2$, …, $2a_{10}$ равняться 2012?

1.16. [Vse — 1999.F.11.1] Существуют ли 19 попарно различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр таких, что их сумма равна 1999?

1.17. [Vse — 1994.F.11.5] Дана последовательность натуральных чисел a_1, a_2, …, a_n, в которой a_1 не делится на 5 и для всякого n

$$a_{n+1} = a_n + b_n,$$

где b_n — последняя цифра числа a_n. Докажите, что последовательность содержит бесконечно много степеней двойки.

1.18. [Vse — 2000.F.11.2] Докажите, что можно разбить все множество натуральных чисел на 100 непустых подмножеств так, чтобы в любой тройке a, b, c, для которой $a + 99b = c$, нашлись два числа из одного подмножества.

1.19. [Vse — 2007.F.10.4;11.3] Фокусник с помощником собираются показать такой фокус. Зритель пишет на доске последовательность из N цифр. Помощник фокусника закрывает две соседних цифры чёрным кружком. Затем входит фокусник. Его задача — отгадать обе закрытые цифры (и порядок, в котором они расположены). При каком наименьшем N фокусник может договориться с помощником так, чтобы фокус гарантированно удался?

2 Московская математическая олимпиада

2.1. [Mos — 2013.8.3] На занятии кружка 10 школьников решали 10 задач. Все школьники решили разное количество задач; каждую задачу решило одинаковое количество школьников. Один из этих десяти школьников, Боря, решил задачи с первой по пятую и не решил задачи с шестой по девятую. Решил ли он десятую задачу?

2.2. [Mos — 1999.8.4] Петин счет в банке содержит 500 долларов. Банк разрешает совершать операции только двух видов: снимать 300 долларов или добавлять 198 долларов. Какую максимальную сумму Петя может снять со счета, если других денег у него нет?

2.3. [Mos — 2015.8.4] Будем называть натуральное число *почти квадратом*, если это либо точный квадрат, либо точный квадрат, умноженный на простое число. Могут ли 8 почти квадратов идти подряд?

2.4. [Mos — 2017.9.4] Найдите все такие пары натуральных чисел a и k, что для всякого натурального n, взаимно простого с a, число $a^{k^n+1} - 1$ делится на n.

2.5. [Mos — 2017.10.5] При каких натуральных n для всякого натурального $k \geqslant n$ найдётся число с суммой цифр k, кратное n?

2.6. [Mos — 2014.11.1] Существует ли такой квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами и a, не кратным 2014, что все числа $f(1)$, $f(2)$, …, $f(2014)$ имеют различные остатки при делении на 2014?

2.7. [Mos — 2019.11.2] На экране компьютера напечатано натуральное число, делящееся на 7, а курсор находится в промежутке между некоторыми двумя его соседними цифрами. Докажите, что существует такая цифра, что, если её впечатать в этот промежуток любое число раз, то все получившиеся числа также будут делиться на 7.

2.8. [Mos — 2018.11.4] Можно ли представить число 11^{2018} в виде суммы кубов двух натуральных чисел?

2.9. [Mos — 1996.11.4] Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных чисел n, что число n представимо в виде суммы квадратов двух натуральных чисел, а числа $n-1$ и $n+1$ — нет.

2.10. [Mos — 1970.10.4] Имеется натуральное число $n > 1970$. Возьмём остатки от деления числа $2n$ на 2, 3, 4, …, n. Доказать, что сумма этих остатков больше $2n$.

2.11. [Mos — 1993.11.4] В ящиках лежат камни. За один ход выбирается число k, затем камни в ящиках делятся на группы по k штук и остаток менее, чем из k штук. Оставляют по одному камню из каждой группы и весь остаток. Можно ли за пять ходов добиться, чтобы в ящиках осталось ровно по одному камню, если в каждом из них

а) не более 460 камней;

б) не более 461 камня?

2.12. [Mos — 1994.11.6] Докажите, что для любого $k > 1$ найдётся такая степень двойки, что среди k последних её цифр не менее половины составляют девятки. (Например, $2^{12} = \dots 96$, $2^{53} = \dots 992$.)

3 Олимпиада им. Леонарда Эйлера

3.1. [Eul — 2019.R.3] По кругу расставлены 100 натуральных чисел. Каждое из них разделили с остатком на следующее по часовой стрелке. Могло ли получиться 100 одинаковых ненулевых остатков?

4 Турнир городов

4.1. (*Турнир городов, 2016, 8–11*) Трое играют в «камень-ножницы-бумагу». В каждом раунде каждый наугад показывает «камень», «ножницы» или «бумагу». «Камень» побеждает «ножницы», «ножницы» побеждают «бумагу», «бумага» побеждает «камень». Если в раунде было показано ровно два различных элемента (и значит, один из них показали дважды), то игроки (или игрок), показавшие победивший элемент, получают по 1 баллу; иначе баллы никому не начисляются. После нескольких раундов оказалось, что все элементы были показаны одинаковое количество раз. Докажите, что в этот момент сумма набранных всеми баллов делилась на 3.

5 «Покори Воробьёвы горы!»

5.1. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 5–6.3, 7–8.2, 9.1*) Найдите наименьшее $n > 2016$ такое, что $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ не кратно 10.

5.2. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 5–9*) Филателист Андрей решил разложить все свои марки поровну в 3 конверта, но оказалось, что одна марка лишняя. Когда он разложил их поровну в 5 конвертов, лишними оказались 3 марки; наконец, когда он разложил их поровну в 7 конвертов, осталось 5 марок. Сколько всего марок у Андрея, если известно, что недавно он купил для них дополнительный альбом, вмещающий 150 марок, так как такого же старого альбома уже не хватало?

$\boxed{208}$

5.3. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11*) В десятичной записи натурального числа, состоящей только из цифр 4 и 5, количество цифр 5 нечётно и на 17 больше количества цифр 4. Найдите все возможные остатки от деления этого числа на 9.

$\boxed{4}$

5.4. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013, 8*) Агент Бонд (Джеймс Бонд) возводит число 7 в последовательные натуральные степени: $7^1 = 7$, $7^2 = 49$, $7^3 = 343$, ...

а) Верно ли, что в какой-то момент он получит число (отличное от 7), которое оканчивается на $\ldots 7$?

б) Верно ли, что рано или поздно он получит число, которое оканчивается на $\ldots 007$?

а) Да; б) да

5.5. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013, 9*) Натуральные числа m и n, $m \neq n$, таковы, что число 2013^m имеет такие же две последние цифры, как и 2013^n.

а) Приведите пример таких чисел m и n.

б) Выясните, какое наименьшее значение может принимать величина $m + n$.

а) 1 и 21; б) 22

6 «Ломоносов»

6.1. (*«Ломоносов», 2018, 10–11*) Архив фотографий укладывают в порядке их нумерации в одинаковые альбомы, ровно по 4 фотографии на одну страницу. При этом 81-я по счёту фотография попала на 5-ю страницу одного из альбомов, 171-я — на 3-ю страницу другого. Сколько фотографий вмещает каждый альбом?

32

6.2. (*«Ломоносов», 2014, 10–11*) Маша задумала 12-значное число и сообщила Васе, что остаток от деления этого числа на 9 равен 3. Потом Маша зачеркнула одну цифру и сказала Васе, что остаток от деления на 9 получившегося 11-значного числа равен 8. Помогите Васе угадать цифру, которую зачеркнула Маша.

4

6.3. (*«Ломоносов», 2014, 10–11*) Маша выписала на доске подряд все натуральные числа от 2 до 2015. Пришёл Ваня и заменил каждое из этих чисел суммой его цифр. Пришла Таня и сделала то же самое с получившимися числами. Так продолжалось до тех пор, пока на доске не осталось 2014 однозначных чисел (цифр). Какова сумма всех оставшихся чисел?

10070

7 «Высшая проба»

7.1. (*«Высшая проба», 2016, 7–8*) Найдите наименьшее целое положительное число, представимое в виде $20x^2 + 80xy + 95y^2$ для некоторых целых чисел x и y. Строго обоснуйте ответ.

15

7.2. (*«Высшая проба», 2013, 8*) Докажите, что число

$$10^{10^{10^{2013}}} + 10^{10^{2013}} + 10^{2013} - 1$$

не простое.

7.3. (*«Высшая проба», 2018, 9*) Чётное число $2N > 2$ называется подходящим, если оно делится на модуль разницы между наибольшим из своих чётных делителей, отличных от $2N$, и наибольшим из своих нечётных делителей. Сколько существует подходящих чётных чисел, не превосходящих 2018?

$\boxed{420}$

8 «Физтех»

8.1. (*МФТИ, 2002*) Дано число $a = 3^{2002} + 7^{2002}$. Найти последнюю цифру числа a и остаток от деления числа a на 11.

$\boxed{8 \text{ и } 3}$

9 ОММО

9.1. (*ОММО, 2018*) Вася хочет найти все целые числа a такие, что выражение $10n^3 - 3n^5 + 7an$ делится на 15 для всех целых n. Какие остатки может давать число a при делении на 15? Укажите все возможные ответы или докажите, что таких целых чисел a нет.

$\boxed{a = 14}$

9.2. (*ОММО, 2015, 9–11*) Четырёхзначное число X не кратно 10. Сумма числа X и числа, полученного из X перестановкой его второй и третьей цифр, делится на 900. Найдите остаток от деления числа X на 90.

$\boxed{45}$

9.3. (*ОММО, 2015, 9–11*) Если из четырёхзначного числа X вычесть сумму его цифр, то получится натуральное число $N = K^2$, причём K — натуральное число, дающее остаток 5 при делении на 20 и остаток 3 при делении на 21. Найдите число N.

$\boxed{2025}$

9.4. (*ОММО, 2010*) Десятичная запись натурального числа n содержит шестьдесят три цифры. Среди этих цифр есть двойки, тройки и четвёрки. Других цифр нет. Число двоек на 22 больше числа четвёрок. Найти остаток от деления n на 9.

$\boxed{5}$

9.5. (*ОММО, 2014*) Натуральное 61-значное число A записывается только цифрами 2, 3 и 4. При этом двоек на 19 больше, чем четвёрок. Найдите остаток от деления числа A на 9.

$\boxed{2}$

9.6. (*ОММО, 2012*) Найдите последнюю цифру числа $2 \cdot 7^{(2012^{2011})} + 5 \cdot 13^{(12^{11})}$.

$\boxed{7}$