Ортоцентр

Ортоцентр треугольника — это точка пересечения его высот. *Ортотреугольник* — это треугольник, вершинами которого служат основания высот данного треугольника.

Задача 1. Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

Задача 2. Пусть H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC, O — центр его описанной окружности. Докажите, что $\angle ACH = \angle BCO$.

Задача 3. Докажите, что ортоцентр остроугольного треугольника ABC является инцентром его ортотреугольника, а точки A, B, C — центрами вневписанных окружностей ортотреугольника. Что меняется в случае тупоугольного треугольника ABC?

Задача 4. (*ММО, 2015, 8*) В остроугольном треугольнике ABC, в котором $\angle A = 45^\circ$, проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Биссектриса угла BAA_1 пересекает прямую B_1A_1 в точке D, а биссектриса угла CAA_1 пересекает прямую C_1A_1 в точке E. Найдите угол между прямыми BD и CE.

$\boxed{67{,}5^\circ}$

Задача 5. Докажите, что точка, симметричная ортоцентру относительно стороны треугольника, расположена на описанной окружности этого треугольника.

Задача 6. Докажите, что точка, симметричная ортоцентру треугольника ABC относительно середины стороны AB, лежит на описанной окружности этого треугольника и диаметрально противоположна точке C.

Задача 7. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC. Докажите, что $AH = 2R|\cos A|$, где R — радиус описанной окружности данного треугольника.

Задача 8. (*ОММО, 2018*) Точки A_1, B_1, C_1 — точки пересечения продолжений высот остроугольного треугольника ABC с описанной вокруг ABC окружностью. Окружность, вписанная в треугольник $A_1B_1C_1$, касается одной из сторон ABC, а один из углов треугольника ABC равен 40°. Найдите два других угла треугольника ABC.

$\boxed{60^\circ \text{ и } 80^\circ}$

Задача 9. (*Турнир городов, 2016, 8–9*) В остроугольном треугольнике ABC угол C равен 60°. H — точка пересечения высот этого треугольника. Окружность с центром H и радиусом HC второй раз пересекает прямые CA и CB в точках M и N соответственно. Докажите, что AN и BM параллельны (или совпадают).

Задача 10. (*Турнир городов, 2017, 10–11*) Докажите, что в прямоугольном треугольнике ортоцентр треугольника, образованного точками касания сторон с вписанной окружностью, лежит на высоте, проведённой из прямого угла.

Задача 11. (*Турнир городов, 2016, 8–9*) Произвольный треугольник разрезали на равные треугольники прямыми, параллельными сторонам (как показано на рисунке). Докажите, что ортоцентры шести закрашенных треугольников лежат на одной окружности.