Описанная сфера

Задача 1. Найдите радиус сферы, описанной около правильного тетраэдра с ребром 1.

$\frac{\sqrt{6}}{4}$

Задача 2. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 6, 8, 10. Все боковые рёбра равны $5\sqrt{2}$. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

5

Задача 3. Основанием пирамиды служит правильный треугольник со стороной 3. Одно из боковых рёбер перпендикулярно плоскости основания и равно 2. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

2

Задача 4. (*«Физтех», 2012*) На ребре BB_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ выбрана точка Q так, что центр сферы, описанной около пирамиды QAA_1C_1C, лежит в грани AA_1C_1C. Известно, что радиус сферы, описанной около пирамиды $QABC$, равен 2, а ребро основания призмы равно $\sqrt{3}$. Найдите:

а) отношение объёма пирамиды QAA_1C_1C к объёму призмы;
б) длину отрезка QB;
в) объём призмы.

а) 2 : 3; б) $2\sqrt{3}$; в) $\frac{81}{16}$

Задача 5. Рёбра тетраэдра равны 1, 3, 3, 4, 4, 5. Найдите радиус его описанной сферы.

$\frac{5}{2}$

Задача 6. (*МФТИ, 2008*) Грани ABC и ABD пирамиды $ABCD$ ортогональны и являются равными равнобедренными треугольниками с общим основанием AB. Известно, что $AB = 1$, $CD = 2$. Найти угол между прямыми AC и BD, расстояние между прямыми AC и BD и радиус сферы, описанной вокруг пирамиды $ABCD$.

1) $\arccos\frac{1}{9}$; 2) $\frac{\sqrt{5}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{65}}{8}$

Задача 7. (*МФТИ, 2003*) Даны пирамида $ABCD$ и цилиндр. Окружность нижнего основания цилиндра вписана в грань ABC. Окружность верхнего основания цилиндра пересекает ребра DA, DB и DC, а ее центр лежит на грани ABD. Радиус цилиндра равен 3, объем пирамиды $ABCD$ равен $27\sqrt{2}$, ребро $AB = 24$. Найти двугранный угол между гранями ABC и ABD и радиус описанной около $ABCD$ сферы.

$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{4}$, $R = \sqrt{\frac{337}{2}}$

Задача 8. (*МГУ, мехмат, 2003-05.5*) Пирамида $SABCD$ с боковыми ребрами $AS = BS = CS = 2$ вписана в сферу радиуса $\frac{5}{3}$. Линия пересечения плоскостей ASD и BSC касается сферы. Найти объем пирамиды, если $AB = BC = \frac{8}{5}$.

$\frac{96\sqrt{3}}{125}$

Задача 9. (*МГУ, мехмат, 2001-05.5*) Основанием треугольной пирамиды $SABC$ служит треугольник со сторонами $AB = BC = 15$ и $AC = 18$. Двугранные углы при ребрах AB и BC равны по $\operatorname{arctg}\frac{1}{7}$, а при ребре AC — $\frac{\pi}{4}$. Сфера, центр которой лежит в плоскости ABC, касается боковых граней в точках K, L и M. Найти радиус сферы, описанной около пирамиды $SKLM$.

$\boxed{\frac{9}{266}\sqrt{221}}$

Задача 10. (*МГУ, мехмат, 1999-03.6*) Основание H высоты SH треугольной пирамиды $SABC$ принадлежит грани ABC, $SH = \sqrt{\frac{5}{21}}$, $SA = 1$, $SB = 2$, $\angle ASB = 120^\circ$, $\angle ACB = 60^\circ$. Найти радиус сферы, описанной около пирамиды $SABC$.

$\boxed{\frac{\sqrt{21}}{2}}$

Задача 11. (*«Курчатов», 2018, 11*) Тетраэдр $ABCD$ с остроугольными гранями вписан в сферу с центром O. Прямая, проходящая через точку O перпендикулярно плоскости ABC, пересекает сферу в точке E такой, что D и E лежат по разные стороны относительно плоскости ABC. Прямая DE пересекает плоскость ABC в точке F, лежащей внутри треугольника ABC. Оказалось, что $\angle ADE = \angle BDE$, $AF \neq BF$ и $\angle AFB = 80^\circ$. Найдите величину $\angle ACB$.

$\boxed{40^\circ}$

Задача 12. (*«Курчатов», 2019, 11*) В тетраэдре $ABCD$ выполнены равенства:

$$\angle BAC + \angle BDC = \angle ABD + \angle ACD, \quad \angle BAD + \angle BCD = \angle ABC + \angle ADC.$$

Докажите, что центр описанной сферы тетраэдра лежит на прямой, соединяющей середины ребер AB и CD.

Задача 13. (*Турнир городов, 1997, 10–11*) Около правильного тетраэдра $ABCD$ описана сфера. На его гранях как на основаниях построены во внешнюю сторону правильные пирамиды $ABCD'$, $ABDC'$, $ACDB'$, $BCDA'$, вершины которых лежат на этой сфере. Найдите угол между плоскостями ABC' и ACD'.

Задача 14. (*Турнир городов, 2003, 10–11*) Дана треугольная пирамида $ABCD$. В ней R — радиус описанной сферы, r — радиус вписанной сферы, a — длина наибольшего ребра, h — длина наименьшей высоты (на какую-то грань). Докажите, что $R/r > a/h$.

Задача 15. (*Всеросс. по геометрии, 2015, 10*) Четырёхугольная пирамида $SABCD$ вписана в сферу. Из вершин A, B, C, D опущены перпендикуляры AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 на прямые SC, SD, SA, SB соответственно. Оказалось, что точки S, A_1, B_1, C_1, D_1 различны и лежат на одной сфере. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1, D_1 лежат в одной плоскости.

Задача 16. (*Всеросс., 2014, финал, 11*) Сфера ω проходит через вершину S пирамиды $SABC$ и пересекает рёбра SA, SB и SC вторично в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Сфера Ω, описанная около пирамиды $SABC$, пересекается с ω по окружности, лежащей в плоскости, параллельной плоскости (ABC). Точки A_2, B_2 и C_2 симметричны точкам A_1, B_1 и C_1 относительно середин рёбер SA, SB и SC соответственно. Докажите, что точки A, B, C, A_2, B_2 и C_2 лежат на одной сфере.

Задача 17. (*Всеросс., 1999, финал, 11*) Через вершину A тетраэдра $ABCD$ проведена плоскость, касательная к описанной около него сфере. Докажите, что линии пересечения этой плоскости с плоскостями граней ABC, ACD и ABD образуют шесть равных углов тогда и только тогда, когда $AB \cdot CD = AC \cdot BD = AD \cdot BC$.

Задача 18. (*Всеросс., 2006, финал, 11*) Окружность с центром I, вписанная в грань ABC треугольной пирамиды $SABC$, касается отрезков AB, BC, CA в точках D, E, F соответственно. На отрезках SA, SB, SC отмечены соответственно точки A', B', C' так, что $AA' = AD$, $BB' = BE$, $CC' = CF$; S' — точка на описанной сфере пирамиды, диаметрально противоположная точке S. Известно, что SI является высотой пирамиды. Докажите, что точка S' равноудалена от точек A', B', C'.

Задача 19. (*Всеросс., 2001, финал, 11*) Сфера с центром в плоскости основания ABC тетраэдра $SABC$ проходит через вершины A, B и C и вторично пересекает рёбра SA, SB и SC в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Плоскости, касающиеся сферы в точках A_1, B_1 и C_1, пересекаются в точке O. Докажите, что O — центр сферы, описанной около тетраэдра $SA_1B_1C_1$.

Задача 20. (*Всеросс., 2009, финал, 11*) В треугольной пирамиде $ABCD$ все плоские углы при вершинах — не прямые, а точки пересечения высот в треугольниках ABC, ABD, ACD лежат на одной прямой. Докажите, что центр описанной сферы пирамиды лежит в плоскости, проходящей через середины ребер AB, AC, AD.

Задача 21. (*Турнир городов, 2009, 10–11*) Три плоскости разрезают параллелепипед на 8 шестигранников, все грани которых — четырёхугольники (каждая плоскость пересекает свои две пары противоположных граней параллелепипеда и не пересекает две оставшиеся грани). Известно, что вокруг одного из этих шестигранников можно описать сферу. Докажите, что и вокруг каждого из них можно описать сферу.

Задача 22. (*Турнир городов, 2005, 10–11*) Икосаэдр и додекаэдр вписаны в одну и ту же сферу. Докажите, что тогда они описаны вокруг одной и той же сферы.