

НОД и НОК

Содержание

1	Всероссийская олимпиада школьников по математике	1
2	Московская математическая олимпиада	4
3	Олимпиада им. Леонарда Эйлера	5
4	Турнир городов	5
5	«Покори Воробьёвы горы!»	5
6	«Ломоносов»	5
7	«Высшая проба»	6
8	«Физтех»	6
9	Свойство Лукача	7

Понятия наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного содержатся в листке «НОД и НОК» для 5–7 классов.

0.1. Пусть a и b — фиксированные целые числа. Рассмотрим множество S чисел вида $ax + by$ со всевозможными целыми x и y . Докажите, что:

- $a, b \in S$;
- если $m \in S$ и $n \in S$, то $m \pm n \in S$;
- если $k \in \mathbb{Z}$ и $m \in S$, то $km \in S$;
- если $m, n \in S$ и $n > 0$, то остаток от деления m на n принадлежит S ;
- если c — общий делитель чисел a и b , то все числа из S делятся на c ;
- если d — наименьшее положительное число в S , то все числа из S делятся на d .

0.2. Докажите, что число d из предыдущей задачи есть наибольший общий делитель чисел a и b .

0.3. Что представляет собой множество S из задачи 0.1, если числа a и b взаимно просты?

$$\boxed{\mathbb{Z} = S}$$

0.4. Докажите, что $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a, a - b)$ для любых целых a и b .

0.5. Докажите, что при любом натуральном n числа $21n + 4$ и $14n + 3$ взаимно простые.

0.6. Для любых натуральных a, x, y докажите, что $\text{НОК}(ax, ay) = a \cdot \text{НОК}(x, y)$.

1 Всероссийская олимпиада школьников по математике

1.1. [Vse — 2016.S.8.1] Робинзон Крузо каждый второй день пополняет запасы питьевой воды из источника, каждый третий день собирает фрукты и каждый пятый день ходит на охоту. Сегодня, 13 сентября, у Робинзона тяжёлый день: он должен делать все эти три дела. Когда у Робинзона будет следующий тяжёлый день?

$$\boxed{\text{каждый 5-й}}$$

1.2. [Vse — 2019.S.8.2] В мешке у Деда Мороза находятся меньше ста подарков для Пети, Вася, Бори и Лёши. Дед Мороз отдал половину подарков Пете, пятую часть — Васе, седьмую часть — Боре. Сколько подарков досталось Лёше?

□□

1.3. [Vse — 2019.S.9.5] Найдите все такие пары натуральных чисел a и b , что

$$\text{НОК}(a, b) = \text{НОД}(a, b) + 19$$

(и докажите, что других нет).

НОД(a, b) — это наибольший общий делитель, то есть наибольшее натуральное число, делящее и a , и b . НОК(a, b) — это наименьшее общее кратное, то есть наименьшее натуральное число, кратное и a , и b .

$$(1, 20); (20, 1); (4, 5); (5, 4); (8, 19); (19, 8); (38, 19)$$

1.4. [Vse — 2019.M.9.1] Отец и сын несут одинаковые банки консервов. Масса каждой банки выражается целым числом граммов, не меньшим чем 300, но не большим чем 400. Отец несёт 6 кг 500 г, а сын — 2 кг 600 г. Сколько банок у отца и сколько у сына?

$$20 \text{ банок у отца и } 8 \text{ банок у сына}$$

1.5. [Vse — 2003.R.8.6] Для некоторых натуральных чисел a , b , c и d выполняются равенства

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{ab + 1}{cd + 1}.$$

Докажите, что $a = c$ и $b = d$.

1.6. [Vse — 2014.R.9.3] Учитель записал Пете в тетрадь четыре различных натуральных числа. Для каждой пары этих чисел Петя нашёл их наибольший общий делитель. У него получились шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5 и N , где $N > 5$. Какое наименьшее значение может иметь число N ?

1.7. [Vse — 2016.R.9.3] Петя выбрал несколько последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел являться степенью двойки?

1.8. [Vse — 1996.R.9.3] Пусть a , b и c — попарно взаимно простые натуральные числа. Найдите все возможные значения $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$, если известно, что это число целое.

1.9. [Vse — 2009.F.9.1] Знаменатели двух несократимых дробей равны 600 и 700. Найдите наименьшее возможное значение знаменателя их суммы (в несократимой записи).

1.10. [Vse — 2016.R.10.2] Петя выбрал 10 последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел оканчиваться на 2016?

1.11. [Vse — 2004.R.9.4;10.3] Три натуральных числа таковы, что произведение каждого двух из них делится на сумму этих двух чисел. Докажите, что эти три числа имеют общий делитель, больший единицы.

1.12. [Vse — 1995.R.10.2] Натуральные числа m и n таковы, что $\text{НОК}(m, n) + \text{НОД}(m, n) = m + n$. Докажите, что одно из чисел m или n делится на другое.

1.13. [Vse — 2013.R.10.6] Натуральные числа a , b и c , где $c \geq 2$, таковы, что $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$. Докажите, что хотя бы одно из чисел $a + c$, $b + c$ — составное.

1.14. [Vse — 1994.F.10.5] Докажите, что для натуральных чисел k , m и n справедливо неравенство

$$[k, m] \cdot [m, n] \cdot [n, k] \geq [k, m, n]^2$$

(здесь через $[x, y, \dots]$ обозначено наименьшее общее кратное чисел x, y, \dots).

1.15. [Vse — 2006.F.9.5;10.5] Пусть a_1, a_2, \dots, a_{10} — натуральные числа, $a_1 < a_2 < \dots < a_{10}$. Пусть b_k — наибольший делитель a_k , меньший a_k . Оказалось, что $b_1 > b_2 > \dots > b_{10}$. Докажите, что $a_{10} > 500$.

1.16. [Vse — 2000.F.9.2] Таня задумала натуральное число $X \leq 100$, а Саша пытается его угадать. Он выбирает пару натуральных чисел M и N , меньших 100, и задаёт вопрос: «Чему равен наибольший общий делитель $X + M$ и N ?» Докажите, что Саша может угадать Танино число, задав семь таких вопросов.

1.17. [Vse — 2016.F.9.3] Саша выбрал натуральное число $N > 1$ и выписал в строчку в порядке возрастания все его натуральные делители: $d_1 < \dots < d_s$ (так что $d_1 = 1$ и $d_s = N$). Затем для каждой пары стоящих рядом чисел он вычислил их наибольший общий делитель; сумма полученных $s - 1$ чисел оказалась равной $N - 2$. Какие значения могло принимать N ?

1.18. [Vse — 2013.F.9.3] На доске написали 100 попарно различных натуральных чисел a_1, a_2, \dots, a_{100} . Затем под каждым числом a_i написали число b_i , полученное прибавлением к a_i наибольшего общего делителя остальных 99 исходных чисел. Какое наименьшее количество попарно различных чисел может быть среди b_1, b_2, \dots, b_{100} ?

1.19. [Vse — 2015.F.10.5] Известно, что клетчатый квадрат можно разрезать на n одинаковых фигурок из k клеток. Докажите, что его можно разрезать и на k одинаковых фигурок из n клеток.

1.20. [Vse — 2014.R.10.7] По кругу стоят 10^{1000} натуральных чисел. Между каждыми двумя соседними числами записали их наименьшее общее кратное. Могут ли эти наименьшие общие кратные образовать 10^{1000} последовательных чисел (расположенных в каком-то порядке)?

1.21. [Vse — 1996.F.10.5] В вершинах куба записали восемь различных натуральных чисел, а на каждом его ребре — наибольший общий делитель двух чисел, записанных на концах этого ребра. Могла ли сумма всех чисел, записанных в вершинах, оказаться равной сумме всех чисел, записанных на рёбрах?

1.22. [Vse — 1995.F.10.5] Последовательность натуральных чисел a_i такова, что $\text{НОД}(a_i, a_j) = \text{НОД}(i, j)$ для всех $i \neq j$. Докажите, что $a_i = i$ для всех $i \in \mathbb{N}$.

1.23. [Vse — 2003.R.9.7] Докажите, что из любых шести четырёхзначных чисел, взаимно простых в совокупности, всегда можно выбрать пять чисел, также взаимно простых в совокупности.

1.24. [Vse — 2003.R.10.7] Докажите, что из произвольного множества трёхзначных чисел, включающего не менее четырёх чисел, взаимно простых в совокупности, можно выбрать четыре числа, также взаимно простых в совокупности.

1.25. [Vse — 2010.R.11.4] Назовем тройку натуральных чисел (a, b, c) квадратной, если они образуют арифметическую прогрессию (именно в таком порядке), число b взаимно просто с каждым из чисел a и c , а число abc является точным квадратом. Докажите, что для любой квадратной тройки найдётся другая квадратная тройка, имеющая с ней хотя бы одно общее число. (Тройка (c, b, a) новой тройкой не считается.)

1.26. [Vse — 2006.F.10.2] Сумма кубов трёх последовательных натуральных чисел оказалась кубом натурального числа. Докажите, что среднее из этих трёх чисел делится на 4.

1.27. [Vse — 1997.F.10.7] Найдите все такие тройки натуральных чисел m, n и l , что

$$m + n = (\text{НОД}(m, n))^2, \quad m + l = (\text{НОД}(m, l))^2, \quad n + l = (\text{НОД}(n, l))^2.$$

1.28. [Vse — 2000.F.9.8] По окружности расставлено 100 натуральных чисел, взаимно простых в совокупности. Разрешается прибавлять к любому числу наибольший общий делитель его соседей. Докажите, что при помощи таких операций можно сделать все числа попарно взаимно простыми.

1.29. [Vse — 2005.F.11.4] Натуральные числа x, y, z ($x > 2, y > 1$) таковы, что $x^y + 1 = z^2$. Обозначим через p количество различных простых делителей числа x , через q — количество различных простых делителей числа y . Докажите, что $p \geq q + 2$.

2 Московская математическая олимпиада

2.1. [Mos — 2000.11.1] Наибольший общий делитель натуральных чисел m и n равен 1. Каково наибольшее возможное значение $\text{НОД}(m + 2000n, n + 2000m)$?

2.2. [Mos — 1999.10.3] Найдите все такие пары натуральных чисел x, y , что числа $x^3 + y$ и $y^3 + x$ делятся на $x^2 + y^2$.

2.3. [Mos — 2005.9.5] На окружности расставлено n цифр, отличных от 0. Сеня и Женя переписали себе в тетрадки $n - 1$ цифру, читая их по часовой стрелке. Оказалось, что хотя они начали с разных мест, записанные ими $(n - 1)$ -значные числа совпали. Докажите, что окружность можно разрезать на несколько дуг так, чтобы записанные на дугах цифры образовывали одинаковые числа.

2.4. [Mos — 2014.9.5] *Радикалом* натурального числа N (обозначается $\text{rad}(N)$) называется произведение всех простых делителей числа N , взятых по одному разу. Например, $\text{rad}(120) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Существует ли такая тройка попарно взаимно простых натуральных чисел A, B, C , что $A + B = C$ и $C > 1000 \cdot \text{rad}(ABC)$?

2.5. [Mos — 2018.9.5;10.4] Назовем расстановку n единиц и m нулей по кругу *хорошей*, если в ней можно поменять местами соседние нуль и единицу так, что получится расстановка, отличающаяся от исходной поворотом. При каких натуральных n, m существует *хорошая* расстановка?

3 Олимпиада им. Леонарда Эйлера

3.1. [Eul — 2009.F.5] Можно ли вместо звёздочек вставить в выражение

$$\text{НОК}(*, *, *) - \text{НОК}(*, *, *) = 2009$$

в некотором порядке шесть последовательных натуральных чисел так, чтобы равенство стало верным?

3.2. [Eul — 2014.R.3] Взяли четыре натуральных числа. Для каждой пары этих чисел выписали их наибольший общий делитель. Получились шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5, N , где $N > 5$. Какое наименьшее значение может принимать число N ?

3.3. [Eul — 2016.R.4] Петя выбрал 10 последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел оканчиваться на 2016?

4 Турнир городов

4.1. (*Турнир городов, 2015, 8–11*) Существуют ли такие десять попарно различных натуральных чисел, что их среднее арифметическое больше их наибольшего общего делителя

- а) ровно в шесть раз;
- б) ровно в пять раз?

а) Да; б) Нет

4.2. (*Турнир городов, 2015, 10–11*) По кругу записывают 2015 натуральных чисел так, чтобы каждые два соседних числа различались на их наибольший общий делитель. Найдите наибольшее натуральное N , на которое гарантированно будет делиться произведение этих 2015 чисел.

3 · 2¹⁰⁰⁷ · 5

5 «Покори Воробьёвы горы!»

5.1. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 5–9) Найдите наименьшее натуральное N такое, что $N + 2$ делится (без остатка) на 2, $N + 3$ — на 3, ..., $N + 10$ — на 10.

2520

5.2. («Покори Воробьёвы горы!», 2011, 9–11) Пусть $\frac{m}{n}$ — положительная несократимая дробь, и известно, что дробь $\frac{4m+3n}{5m+2n}$ сократима. На какие натуральные числа она сократима?

7 и 11

6 «Ломоносов»

6.1. («Ломоносов», 2014, 8–9) Найдите все пары натуральных m, n , таких, что $\text{НОД}(m, n) = 2015!$, а $\text{НОК}(m, n) = 2016!$. (Пары (m, n) и (n, m) считаются как одна пара.)

11012 2015 2016

6.2. («Ломоносов», 2014, 10–11) Среди чисел, превышающих 2013, найдите наименьшее нечётное число N , при котором дробь $\frac{13N-10}{19N-9}$ сократима.

2129

6.3. («Ломоносов», 2007) Натуральные числа a, b и c таковы, что $\text{НОК}(a, b) = 60$ и $\text{НОК}(a, c) = 270$. Найдите $\text{НОК}(b, c)$.

180

6.4. («Ломоносов», 2009) Какие значения может принимать наибольший общий делитель натуральных чисел m и n , если при увеличении числа m на 6 он увеличивается в 4 раза?

6

7 «Высшая проба»

7.1. («Высшая проба», 2016, 10–11) Петя хочет проверить знания своего брата Коли — победителя олимпиады «Высшая проба» по математике. Для этого Петя задумал три натуральных числа a, b, c и вычислил $x = \text{НОД}(a, b)$, $y = \text{НОД}(b, c)$, $z = \text{НОД}(c, a)$. Затем он написал на доске три ряда по пять чисел в каждом:

6, 8, 12, 18, 24

14, 20, 28, 44, 56

5, 15, 18, 27, 42

Петя сообщил Коле, что одно из чисел в первом ряду равно x , одно из чисел во втором ряду равно y , одно из чисел в третьем ряду равно z , и попросил угадать числа x, y, z . Подумав несколько минут, Коля справился с задачей, правильно назвав все три числа. Назовите их и вы. Докажите, что существует единственная такая тройка (x, y, z) .

(8, 14, 18)

8 «Физтех»

8.1. («Физтех», 2015, 8–9) На доске написаны числа $2^{17}3^{25}5^{12}7^3$ и $2^{23}3^{22}5^{27}7^{15}$. За одну операцию разрешается написать на доску ещё одно натуральное число — разность каких-то двух написанных на доске. При этом запрещается записывать такие числа, которые уже есть на доске. Найдите сумму двух наименьших чисел, которые могут получиться на доске в результате применения таких операций.

926100

8.2. («Физтех», 2014, 7–10) Какое наибольшее значение может быть у наибольшего общего делителя чисел $11n + 6$ и $23n + 5$, если n — натуральное число?

□88

8.3. («Физтех», 2013, 8, 11) Натуральные числа m и n удовлетворяют условию $\text{НОД}(m, n) = 1$. Какое наибольшее значение может принимать $\text{НОД}(20m + n, 30n + m)$?

□669

9 Свойство Лукача

Рассмотрим последовательность натуральных чисел a_1, a_2, \dots (для технических целей положим также $a_0 = 0$). Будем говорить, что эта последовательность обладает *свойством Лукача*, если выполнено равенство $(a_m, a_n) = a_d$, где $d = (m, n)$ — наибольший общий делитель m и n .

9.1. Докажите, что если $(a_n, a_k) = (a_{n-k}, a_k)$ при $n > k$, то последовательность a_n обладает свойством Лукача.

9.2. Докажите, что последовательность $a_n = 2^n - 1$ обладает свойством Лукача.

9.3. [Sov — 1988.10.7] Последовательность $\{a_n\}$ задана соотношениями

$$a_0 = 0, a_n = P(a_{n-1}), n = 1, 2, \dots,$$

где $P(x)$ — многочлен с натуральными коэффициентами. Докажите, что для любых натуральных чисел m и k с наибольшим общим делителем d наибольший общий делитель чисел a_m и a_k равен a_d .

9.4. Числа Фибоначчи задаются соотношениями $F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ (при $n \geq 2$).

а) Докажите, что $F_n = F_{k+1}F_{n-k} + F_kF_{n-k-1}$ при $n > k$.

б) Докажите, что соседние числа Фибоначчи взаимно просты.

в) (*Теорема Лукача*) Докажите, что $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$.