

## МГУ. Вписанная сфера

1. (МГУ, ДВИ, 235.7) Плоские углы при вершине правильной четырёхугольной пирамиды равны  $30^\circ$ . Найдите длину ребра основания пирамиды, если известно, что радиус сферы, вписанной в эту пирамиду, равен 1.

 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 

2. (МГУ, ДВИ, 2013.7) В основании прямой призмы  $ABCA'B'C'$  лежит прямоугольный треугольник  $ABC$ , такой что  $AC = BC = 1$ . На ребре  $A'B'$  верхнего основания (параллельном  $AB$ ) отмечена точка  $D$ , так что  $A'D : DB' = 1 : 2$ . Найдите радиус сферы, вписанной в тетраэдр  $ABC'D$ , если высота призмы равна 1.

 $\frac{1}{1 - \left( \frac{8}{27} \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + 1 \right)}$ 

3. (МГУ, ДВИ, 2015.7) В правильную треугольную призму с основаниями  $ABC$ ,  $A'B'C'$  и рёбрами  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  вписана сфера. Найдите её радиус, если известно, что расстояние между прямыми  $AE$  и  $BD$  равно  $\sqrt{13}$ , где  $E$  и  $D$  — точки, лежащие на  $A'B'$  и  $B'C'$  соответственно, и  $A'E : EB' = B'D : DC' = 1 : 2$ .

 $\frac{9}{13}$ 

4. (МГУ, ДВИ, 215.7) Сфера касается всех рёбер тетраэдра  $ABCD$ . Известно, что произведения длин скрещивающихся рёбер равны. Известно также, что  $AB = 3$ ,  $BC = 1$ . Найдите  $AC$ .

 $3$ 

5. (МГУ, ДВИ, 222.7) В пирамиду, в основании которой лежит ромб с острым углом  $\alpha$  и стороной  $\sqrt{6}$ , вписана сфера диаметра 1. Найдите угол  $\alpha$ , если известно, что все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости её основания под углом  $60^\circ$ .

 $45^\circ$ 

6. (МГУ, ДВИ, 213.7) Вписанная в треугольную пирамиду  $ABCD$  сфера касается граней  $BCD$ ,  $ACD$ ,  $ABD$  и  $ABC$  в точках  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  и  $D_1$ , соответственно. Известно, что  $D_1$  является точкой пересечения высот треугольника  $ABC$ , что плоскости  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  параллельны и что радиус окружности, описанной около треугольника  $ABC$  в четыре раза больше радиуса окружности, описанной около треугольника  $A_1B_1C_1$ . Найдите отношение, в котором сфера делит отрезок  $DD_1$ , считая от вершины  $D$ .

 $\frac{2}{1}$ 

7. Вспомните, как *доказывается* планиметрическая формула  $S = pr$ . Установите её стерео-

метрический аналог (сфера, вписанная в многогранник), перенеся идею доказательства в пространство.

8. («Покори Воробьёвы горы!», 2017.3) В треугольной пирамиде длины перпендикуляров, опущенных из четырёх вершин на противоположные грани, равны 3, 4, 7 и  $84/37$  соответственно. Найдите радиус вписанного в эту пирамиду шара.

$\frac{1}{9}$

9. («Физтех», 2017.7) Основание треугольной пирамиды  $ABCD$  — правильный треугольник  $ABC$ . Объём пирамиды равен  $\frac{25}{\sqrt{3}}$ , а её высота, проведённая из вершины  $D$ , равна 3. Точка  $M$  — середина ребра  $CD$ . Известно, что радиусы сфер, вписанных в пирамиды  $ABCM$  и  $ABDM$ , равны между собой.

- а) Найдите все возможные значения угла между гранями пирамиды при ребре  $AB$ .
- б) Найдите все возможные значения длины ребра  $CD$ , если дополнительно известно, что грани  $BSC$  и  $ABC$  взаимно перпендикулярны.

$\frac{1}{18} \sqrt{13} \text{ или } \frac{1}{18} \sqrt{13} \text{ (} \arccos(\frac{1}{4}) \text{)}$

10. («Покори Воробьёвы горы!», 2012.5) Радиус сферы, вписанной в правильную треугольную пирамиду, равен  $R$ . Найдите величину двугранного угла при боковом ребре этой пирамиды, при которой максимален объём другой пирамиды, вершинами которой служат центр вписанной в исходную пирамиду сферы и точки касания этой сферы с боковыми гранями исходной пирамиды.

006

11. (МФТИ, 2005.4) Сторона основания  $ABC$  правильной треугольной пирамиды  $ABCD$  равна 6, двугранный угол между боковыми гранями пирамиды равен  $\arccos \frac{7}{32}$ . Точки  $A_1$  и  $B_1$  — середины рёбер  $AD$  и  $BD$  соответственно,  $BC_1$  — высота в треугольнике  $DBC$ . Найти:

- 1. угол между прямыми  $AB$  и  $B_1C_1$ ;
- 2. площадь треугольника  $A_1B_1C_1$ ;
- 3. расстояние от точки  $B$  до плоскости  $A_1B_1C_1$ ;
- 4. радиус вписанного в пирамиду  $A_1B_1C_1D$  шара.

$\arccos \frac{5}{8} \text{ ; } 3 \text{ ; } \frac{21}{16} \sqrt{\frac{10}{3}} \text{ (} \frac{1}{3} \sqrt{10} \text{)}$

12. («Покори Воробьёвы горы!», 2017.5) В правильной шестиугольной призме  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  сторона основания равна  $\frac{2}{\sqrt{3}}$ , а боковая сторона  $AA_1 = 2$ .

- а) Докажите, что в призму можно вписать шар, и найдите его радиус.
- б) Найдите объём наименьшей части шара, которую отсекает плоскость, проходящая через точки  $B$ ,  $A_1$  и  $E$ .

$\frac{10}{14} \sqrt{\frac{15}{14}} \text{ (} \frac{5}{7} \text{)}$

**13.** (МГУ, мехмат, 1999-05.6) Основанием пирамиды  $SABCD$  является трапеция  $ABCD$  с основаниями  $BC$  и  $AD$  такими, что  $BC : AD = 2 : 5$ . Диагонали трапеции пересекаются в точке  $E$ , а центр  $O$  вписанной в пирамиду сферы лежит на отрезке  $SE$  и делит его в отношении  $SO : OE = 7 : 2$ . Найти площадь полной поверхности пирамиды, если площадь боковой грани  $SBC$  равна 8.

126