

МГУ. Тригонометрические уравнения

Содержание

1	Формулы двойного угла и сведение к квадратному уравнению	1
2	Однородные уравнения	3
3	Преобразование сумм в произведения и произведений в суммы	4
4	Формулы понижения степени	6
5	Метод вспомогательного аргумента	7
6	Различные преобразования и разложение на множители	8
7	Формулы тройного угла	14
8	Замена переменной	15
9	Уравнения с радикалами	16
10	Уравнения с модулем	20
11	Минимаксные задачи (метод оценок)	23

Этот небольшой задачник составлен с целью помочь школьнику подготовиться к тригонометрии, которая из года в год встречается в МГУ на ДВИ (дополнительном вступительном испытании). Задачник содержит:

- Все тригонометрические уравнения, которые встречались на ДВИ с момента его возникновения в 2011 году по 2024 год включительно (исключая клоны задач параллельных вариантов 2011–2019 годов).
- Избранные задачи вступительных экзаменов в МГУ и МФТИ прежних лет (до эпохи ЕГЭ и ДВИ) — для расширения кругозора и обеспечения запаса прочности.
- Избранные задачи некоторых олимпиад («Ломоносов», «Покори Воробьевы горы!», «Физтех», ОММО) — для еще большего расширения кругозора и создания еще большего запаса прочности :-)

1 Формулы двойного угла и сведение к квадратному уравнению

Теория: [Тригонометрические уравнения. 1](#) (раздел 2)

1. (МГУ, ДВИ, 2011.2) Решите уравнение

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{\pi}{u\pi}$$

2. (МГУ, ДВИ, 2019.3) Решите уравнение

$$7 \sin x + 2 \cos 2x = 5.$$

$$\mathbb{Z} \ni 2k_1\pi, \frac{\pi}{2} + 2k_2\pi, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{2} + 2k_1\pi, \frac{\pi}{2} + 2k_2\pi + \arcsin \frac{1}{2}$$

3. (МГУ, ф-т гос. управления, 2009) Решить уравнение

$$\cos 2x - 4\sqrt{2} \cos x + 4 = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \cdot \sqrt{2} + \frac{\pi}{2} \mp$$

4. (МГУ, биологич. ф-т, 2006) Решить уравнение

$$3 \cos 2x + 11 \sin x = 7.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \cdot \sqrt{2} + \frac{\pi}{2} u(1-)$$

5. («Покори Воробьёвы горы!», 2014) Найдите наибольший отрицательный корень уравнения

$$\sin \pi x = -\sqrt{3} \cos \frac{\pi x}{2}.$$

$$\frac{\pi}{2}$$

6. (МГУ, ДВИ, 221.3) Решите уравнение

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x + 3 = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \cdot \sqrt{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

7. (МГУ, геологич. ф-т, 2007) Решите уравнение:

$$\frac{\cos 2x + \sin x}{\cos x} = \frac{1}{2} \cos x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \cdot \sqrt{2} + \frac{\pi}{2} \operatorname{arctg} \frac{1+u}{1-u}(1-)$$

8. (МГУ, МШЭ, 2005) Найдите все решения уравнения

$$6 \cos \frac{15\pi}{4} \cos \frac{x}{2} - \cos x = 3,$$

принадлежащие отрезку $[-2; 10,99]$.

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

9. (МГУ, филологический ф-т, 2004) Решить уравнение:

$$2 \sin^2 4x - 5 \sin \left(\frac{\pi}{2} - 4x \right) + 1 = 0.$$

$$\frac{\pi}{4x} + \frac{\pi}{x} \mp$$

10. (МГУ, филологический ф-т, 2003) Решить уравнение:

$$\cos 4x = \cos^4 x - \sin^4 x.$$

$$\frac{\pi}{4x}$$

11. (МГУ, биологический ф-т, 2003) Решить уравнение:

$$2 \cos^2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + 3 \cos \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) = -3.$$

$$4x + \frac{\pi}{2}$$

12. (МГУ, филологич. ф-т, 2007) Решить уравнение

$$5 \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) = 4 \sin \left(\frac{5\pi}{6} - x \right) - 1.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{6} \text{ arcsin } u(1-) + \frac{9}{\pi} - u\pi\pi + \frac{\pi}{2}$$

13. («Покори Воробьёвы горы!», 2015.4) Решите уравнение

$$\frac{\cos 4x - 6 \cos^2 2x + 8 \cos^2 x}{\sqrt{6x - x^2 - 5}} = 0.$$

$$\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$$

2 Однородные уравнения

Теория: [Тригонометрические уравнения. 1](#) (раздел 3)

14. (МГУ, ДВИ, 2016.3) Решите уравнение

$$2 \cos^2 x + 3 \sin 2x = 4 + 3 \cos 2x.$$

$$\mathbb{Z} \ni \varphi, \pi\varphi + \pi k + \frac{\pi}{2} = x$$

15. (МГУ, централизованный экзамен, 2009) Решить уравнение

$$2 \cos^2 x - 5 \sin 2x + \frac{6t}{\pi} = 0,$$

где $t = \arccos\left(\cos \frac{23\pi}{3}\right) - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{6} \text{ где } u \in \mathbb{Z}$$

16. (МГУ, мехмат, 2004-03.1) Найдите сумму тангенсов всех таких $x \in (-\pi; \pi)$, что

$$\sin 2x + 5 \cos 2x = 3.$$

$$\frac{\pi}{1}$$

17. («Физтех», 2014.2) Решите уравнение

$$\frac{\sqrt{3} \cos x}{\sin x + \cos x} = \operatorname{tg} 2x + \frac{\sin x}{\sin x - \cos x}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{2}$$

3 Преобразование сумм в произведения и произведений в суммы

Теория: [Тригонометрические уравнения. 2](#) (разделы 2 и 3)

18. (МГУ, ДВИ, 2012.4) Решите уравнение

$$\sin 3x = \sqrt{2} \cos x - \sin x.$$

$$\mathbb{Z} \ni \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} + \pi, \frac{\pi}{4} + \pi$$

19. (МГУ, ДВИ, 2017.3) Решите уравнение

$$\sin 7x + \sin 6x = \sin x.$$

$$\mathbb{Z} \ni \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \pi, \frac{\pi}{2} + 2\pi$$

20. (МГУ, ДВИ, 222.3) Решите уравнение

$$\sin x + \sin 2x = \cos x + \cos 2x.$$

$$\mathbb{Z} \ni \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \pi, \frac{3\pi}{2} + \pi$$

21. (МГУ, экономич. ф-т, 2007) Найдите все решения уравнения $\cos 3x = \sin x$, удовлетворяющие одновременно двум неравенствам: $\sin x \geq 0$, $\cos x \leq 0$.

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{8}{\pi}, u\pi + \frac{4}{\pi}$$

22. («Покори Воробьёвы горы!», 2014.1) Решить уравнение

$$\sin\left(14x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(20x + \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{8}{u\pi} + \frac{21}{\pi} - \frac{11}{u\pi}$$

23. (МГУ, ДВИ, 204.3) Решите уравнение

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3}.$$

$$\mathbb{Z} \ni \pi, u\pi + \frac{8}{\pi}$$

24. (МГУ, химический ф-т, 2006) Решить уравнение

$$\cos x + \sin x + \cos 3x + \sin 3x = -\sqrt{6} \cos x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{21}{\pi} \mp \frac{8}{\pi}, u\pi + \frac{2}{\pi}$$

25. (МФТИ, 2006) Решить уравнение

$$5 \sin 3x + 16 \cos x + 5 \sin x = 12 \cos^3 x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{4}{\pi} \sin x - u\pi + \frac{4}{\pi} - u\pi + \frac{2}{\pi}$$

26. (МГУ, ДВИ, 206.3) Решите уравнение

$$\sin x \cos 3x = \sin 3x \cos 5x.$$

$$\mathbb{Z} \ni \pi, k_1\pi, \frac{2}{\pi k_2} + \frac{21}{\pi} \mp \frac{4}{\pi k_1}$$

27. (МГУ, ДВИ, 2018.3) Решите уравнение

$$\sin 4x \cos 10x = \sin x \cos 7x.$$

$$\mathbb{Z} \ni \pi, \frac{8}{k\pi}, \frac{2k+1}{22}, \pi, k \in \mathbb{Z}$$

28. («Покори Воробьёвы горы!», 2014.3) Решить уравнение

$$6 \cos 9x \cos 2x = 1 + 3 \cos 11x + 2 \cos^3 7x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \left(\frac{4}{ux^2} + \frac{7}{1-9x} \cos 9x \frac{4}{1} \mp \frac{4}{ux^2} \right)$$

29. («Физтех», 2010.2) Решить уравнение

$$\frac{\sin 5x \cos 3x - \sin 7x \cos x}{\cos 2x + \sin 2x} = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \left(\frac{7}{ux} + \frac{8}{x} \mp \frac{7}{ux} \right)$$

4 Формулы понижения степени

Теория: [Тригонометрические уравнения. 2](#) (раздел 4)

30. (МГУ, централизованный экзамен, 2012) Решите уравнение

$$\sin^2 2x = \sin^2 x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \left(\frac{8}{ux} \right)$$

31. (МГУ, ф-т почвоведения, 2007) Решить уравнение

$$\sin^2 11x = \cos^2 17x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \left(\frac{9}{ux} + \frac{71}{x} \mp \frac{87}{ux} + \frac{99}{x} \right)$$

32. (МГУ, ДВИ, 205.3) Решите уравнение

$$9 \operatorname{tg}^2 x - 2 \cos 2x = 2.$$

$$\mathbb{Z} \ni \psi \left(\operatorname{tg}^2 x + \frac{9}{x} \mp \right)$$

33. (МГУ, ф-т биоинженерии и биоинформатики, 2009) Решить уравнение

$$8 \cos^2 5x - 4 \cos^2 10x = 1.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \left(\frac{9}{ux} + \frac{91}{x} \mp \right)$$

34. («Физтех», 2012.1) Решите уравнение

$$\cos^2 2x + \cos^2 4x = 1 + \operatorname{ctg} 6x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{9}{uv} + \frac{71}{v}$$

35. (МФТИ, 2002) Решить уравнение

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = 1 - \frac{\cos 3x}{\cos 2x}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{8}{uv} + \frac{9}{v}, uvz$$

5 Метод вспомогательного аргумента

Теория: [Тригонометрические уравнения. 2](#) (раздел 1)

36. (МГУ, биологический ф-т, 2005) Решите уравнение

$$\cos x - \sqrt{3} \sin x = \sqrt{2}.$$

$$uvz + \frac{7}{v} \mp \frac{8}{v} -$$

37. (МГУ, ДВИ, 202.3) Решите уравнение

$$\sin x + \cos x = 2\sqrt{2} \sin x \cos x.$$

$$\mathbb{Z} \ni y, k \frac{8}{2k} + \frac{7}{v}$$

38. (МГУ, ДВИ, 222.3) Решите уравнение

$$\sin x + \sin 2x = \cos x + \cos 2x.$$

$$\mathbb{Z} \ni z_1, k_1, k_2 \frac{3}{2} + 9/v + 2k_1\pi, \pi/2 + 2k_2\pi,$$

39. (МГУ, ДВИ, 234.4) Решите уравнение

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin x} - \frac{1}{\cos x} = 4.$$

$$\mathbb{Z} \ni z, k_1, k_2 \frac{6}{v} + \frac{3}{2k_1\pi}, \frac{3}{2\pi} + 2k_2\pi,$$

40. (МГУ, ДВИ, 226.3) Решите уравнение

$$\operatorname{tg} x = 4 \sin x - \sqrt{3}.$$

$$\mathbb{Z} \ni 2k\pi, 1k\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{6}{2k}, 1k\pi + \frac{\pi}{2}$$

41. (МГУ, ДВИ, 246.4) Решите уравнение

$$\operatorname{tg} x - 4 \sin x = \sqrt{3}.$$

$$\mathbb{Z} \ni \pi + \frac{\pi}{1+2k} + \frac{6}{2k}, 1k\pi + \frac{\pi}{2} - x$$

42. (МФТИ, 2006) Решить уравнение

$$\left(\sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x\right)^2 = 7 + 3 \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right).$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{2}$$

6 Различные преобразования и разложение на множители

По теории можно посмотреть:

- [Тригонометрические уравнения. 2](#) (раздел 5),
- [Преобразования тригонометрических уравнений](#),

однако этим дело не ограничивается. Думайте, комбинируйте, ищите!

43. (МГУ, ДВИ, EM222.3) Решите уравнение

$$4 \sin^2 x \sin 2x - \sin 4x = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni 2k\pi, 1k\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{9}{2k}, 1k\pi$$

44. (МГУ, ИСАА, 2005) Решите уравнение

$$\cos 4x = 4 \cos x \cos 2x - 1.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{\sqrt{2}-1} \operatorname{arccos} \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

45. (МГУ, «Математика вместо ЕГЭ», 2010) Решите уравнение

$$2 \sin^4 x + 7 \cos^3 x = 2.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, m, n, \pm \frac{\pi}{x}, \pm \frac{\pi}{2n}, \pm \frac{\pi}{m} + \frac{\pi}{x}$$

46. (МГУ, ДВИ, 2013.4) Решите уравнение

$$\frac{\sin 5x}{\sin x} - \frac{\cos 5x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\sin 5x} - \frac{\cos x}{\cos 5x}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, m, n, k, \pm \frac{\pi}{x}, \pm \frac{\pi}{m}, \pm \frac{\pi}{n}, \pm \frac{\pi}{k}, \pm \frac{\pi}{m} + \frac{\pi}{n}, \pm \frac{\pi}{m} + \frac{\pi}{k}, \pm \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{k}$$

47. (МГУ, ДВИ, 201.3) Решите уравнение

$$\operatorname{tg} 2x = 2 \cos 2x \operatorname{ctg} x.$$

$$\mathbb{Z} \ni \pi, k_1, k_2, \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{\pi}{k_1}, \pm \frac{\pi}{k_2}, \pm \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{k_1}, \pm \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{k_2}$$

48. (МГУ, экз. для иностр. гр-н, 2010) Решите уравнение

$$\frac{\cos x + \sin 2x}{\cos 3x} = 1.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, m$$

49. (МГУ, ДВИ, 203.3) Решите уравнение:

$$\cos x \cdot (2 \cos x - \cos 3x) = 1.$$

$$\mathbb{Z} \ni k, \frac{\pi}{k}$$

50. (МГУ, ДВИ, 223.3) Решите уравнение

$$\cos 2x + 6 \sin 2x = \cos 4x + 6 \sin x.$$

$$\mathbb{Z} \ni \pi, \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{\pi}{k_1}, \pm \frac{\pi}{k_2}, \pm \frac{\pi}{2} + 2k_2\pi, \pm \frac{\pi}{k_1}, \pm \frac{\pi}{k_2} \in \mathbb{Z}$$

51. (МФТИ, 1999) Решить уравнение

$$\frac{\cos 3x + \sin 5x}{\cos x + \sin 3x} = -1.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \pm \frac{\pi}{x}, \pm \frac{\pi}{1+u}, \pm \frac{\pi}{1-u}, \pm \frac{\pi}{x} + \frac{\pi}{1+u}, \pm \frac{\pi}{x} + \frac{\pi}{1-u}, \pm \frac{\pi}{x} + \frac{\pi}{1+u} + \frac{\pi}{1-u}, \pm \frac{\pi}{x} + \frac{\pi}{1-u} + \frac{\pi}{1+u}$$

52. (МГУ, ДВИ, 214.3) Решите уравнение

$$\cos 4x + \cos 2x + \operatorname{ctg}^2 x = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni \frac{\pi}{2} + 2k_1\pi, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + k_2\frac{\pi}{2}, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

53. (МГУ, ДВИ, 215.3) Решите уравнение

$$4 \sin 2x \cos 3x - 2 \sin 5x = \operatorname{tg} 2x.$$

$$\mathbb{Z} \ni \frac{\pi}{2} + k_1\pi, \frac{\pi}{3} + 2k_2\pi, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

54. (МГУ, ДВИ, 225.3) Решите уравнение

$$\sin^4 x + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

55. (МГУ, ДВИ, 233.4) Решите уравнение

$$\cos^4 x - \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

$$\mathbb{Z} \ni \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

56. (МГУ, ДВИ, 245.4) Решите уравнение

$$\cos 2x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} (\cos x + \sin x).$$

$$\mathbb{Z} \ni \frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

57. (МГУ, ДВИ, 237.4) Решите уравнение

$$\sqrt{3} \cos x - \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{3} \sin x = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni \frac{\pi}{4} + k_1\pi, \frac{\pi}{4} + 2k_2\pi, \frac{\pi}{2} + k_1\pi, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

58. (МГУ, ДВИ, 244.4) Решите уравнение

$$\cos 2x + \frac{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x}{2} = 1.$$

$$\mathbb{Z} \ni \varphi, \mu\varphi + \frac{\varphi}{2} \mp \nu\varphi = x$$

59. (МГУ, ДВИ, 237.4) Решите уравнение

$$\frac{\operatorname{tg} 2x + 2 \cos x}{\operatorname{tg} 2x - 2 \cos x} = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni \varphi, \nu(1 + \varphi) + \frac{\varphi}{2} \nu(1 - \varphi)$$

60. (МГУ, ДВИ, 213.3) Решите уравнение

$$2 \cdot \frac{\sin 3x - \sin x}{\cos 3x + \cos x} = \sqrt{3} \cdot (1 - \operatorname{tg}^2 x).$$

$$\mathbb{Z} \ni \varphi, \frac{\varphi}{k_1} + \frac{\varphi}{k_2} = x$$

61. (МГУ, ДВИ, 236.4) Решите уравнение

$$2 \cos 2x + \frac{\cos x - \cos 3x}{\cos x + \cos 3x} = 2.$$

$$\mathbb{Z} \ni k_1\pi, \pm k_2\pi + \frac{\varphi}{2} \mp \nu k_3 \in \mathbb{Z}$$

62. (МГУ, ДВИ, 241.4) Решите уравнение

$$\frac{\operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} 4x \operatorname{tg} 2x.$$

$$\mathbb{Z} \ni k_1\pi, \frac{12}{\pi} + k_2\pi, \frac{5}{\pi} + k_3\pi, k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$$

63. (МГУ, ДВИ, 216.3) Решите уравнение

$$\operatorname{ctg} x - 2 \operatorname{ctg} 2x = \frac{2}{3} \cos x.$$

$$\mathbb{Z} \ni \frac{\varphi}{2} + 2k_1\pi, \frac{6}{5\pi} + 2k_2\pi, \nu k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

64. Можете ли вы в уме решить квадратное уравнение $x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$? Дискриминант не вычисляем! (Такие вещи важно уметь делать для того, чтобы в более сложной ситуации издали увидеть квадратный трехчлен, который можно разложить на множители.)

65. (МГУ, ДВИ, 235.4) Решите уравнение

$$\cos^2 x + \sqrt{3} \sin^2 x = (1 + \sqrt{3}) (\cos x - \cos x \sin x + \sin x).$$

$$\mathbb{Z} \ni y \cdot \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

66. (МГУ, ДВИ, 2017.8) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{\cos(x^2 - y^2)} - y \cdot \operatorname{tg}(x^2 - y^2) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \\ \frac{y}{\cos(x^2 - y^2)} - x \cdot \operatorname{tg}(x^2 - y^2) = \sqrt{\frac{\pi}{3}}. \end{cases}$$

$$\frac{y}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \sqrt{3} \cdot \frac{y}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = x$$

67. (ИСАА, 2003) Найдите корни уравнения

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 2(\sqrt{2} + 1) \operatorname{ctg} x,$$

принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$.

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \operatorname{ctg} x + 1 = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

68. (МГУ, химический ф-т, 2005) Решите уравнение

$$\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} 4x + \cos 5x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{01}{\sqrt{2}}$$

69. (МГУ, географический ф-т, 2006) Решить уравнение

$$2 \sin x - \frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x - 1 = 0.$$

$$u \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}, u \sqrt{2} + u$$

70. (МГУ, геологический ф-т, 2006) Найдите корни уравнения

$$\frac{\sqrt{3}(\sin 2x + \cos 3x)}{\cos 2x - \sin 3x} = 1,$$

расположенные в интервале $(1; 2)$.

08
111

71. (МГУ, мехмат, 2008.2) Игорь решал тригонометрическое уравнение и получил ответ

$$(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad \frac{4\pi}{3} \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ в конце учебника выглядел иначе:

$$-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k, \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

Правильный ли ответ получил Игорь? Привести пример тригонометрического уравнения с ответом как в учебнике.

72. («Покори Воробьёвы горы!», 2014.4) Решить уравнение

$$\frac{\cos 5x + \cos x}{\cos 4x + \cos 2x} = \frac{1 + \cos 4x}{\cos x}.$$

$\mathbb{Z} \ni u, \frac{7}{ux} + \frac{v}{x}$

73. (МГУ, ф-т психологии, 2006.6) Решить уравнение

$$9 \cos 2x + 9 \cos 6x = 36 \cos x \cos 3x + 140\sqrt{3} \sin x \sin 2x - 162.$$

$\mathbb{Z} \ni u, u\sqrt{z} + \frac{z}{\sqrt{z}} \cos \arccos z$

74. (МГУ, ВМК, 2007) Найдите все решения уравнения

$$2 \sin \left(x + \frac{7\pi}{25} \right) \cdot \sin \left(3x + \frac{18\pi}{25} \right) = \cos 4x + 2^{\cos \frac{2\pi}{3}},$$

принадлежащие отрезку $[-\frac{\pi}{10}; \frac{4\pi}{5}]$.

$\frac{00z}{200}, \frac{00z}{131\pi} -$

75. (МГУ, мех.мат, 2000-03.3) Найти все корни уравнения

$$\cos x \sin \frac{x}{4} + \frac{9}{10} \sin x + 2 \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{4} - \frac{1}{2} \cos \frac{x}{4} - \frac{9}{20} = 0,$$

принадлежащие отрезку $[-\frac{9}{2}\pi; -\frac{3}{2}\pi]$.

$$\left(\frac{01}{6}-\right) \text{ соооле } \pi - \frac{9}{11} - \frac{9}{61} - \frac{9}{22} -$$

76. («Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10-11.3) Решите уравнение

$$6 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x + 5 \operatorname{ctg} 3x = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{1} \text{ соооле } \frac{\pi}{1} \mp u\pi + \left(\frac{\pi}{1}-\right) \text{ соооле } \frac{\pi}{1} \mp$$

77. (МГУ, ф-т почвоведения, 2006) Найдите наименьшее положительное число α , при котором $\sin \alpha$ градусов равен синусу α радиан.

$$\frac{\pi + 081}{180}$$

78. («Покори Воробьёвы горы!», 2011.2) Найдите наименьшее натуральное решение уравнения

$$\sin(2011x)^\circ = \sin x^\circ.$$

$$12$$

79. («Покори Воробьёвы горы!», 2013.4) Определите, сколько корней на промежутке $[-\pi; \pi]$ имеет уравнение

$$\frac{2 \cos 4x + 1}{2 \cos x - \sqrt{3}} = \frac{2 \sin 4x - \sqrt{3}}{2 \sin x - 1},$$

и найдите эти корни.

$$\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} - \text{ корни уравнения}$$

7 Формулы тройного угла

Теория: [Тригонометрические уравнения. 2](#) (раздел 7)

80. (МГУ, ДВИ, 2012.4) Решите уравнение

$$\sin 3x = \sqrt{2} \cos x - \sin x.$$

$$\mathbb{Z} \ni \varphi, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} (1-); \mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{2}$$

81. (МГУ, ДВИ, 231.4) Решите уравнение

$$\cos 3x + 2 \sin 2x + 2 \cos x = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni \varphi, \pi(1 + 2k) + \frac{\pi}{2}, \pi(1 + 2k) + \frac{\pi}{2} \in \mathbb{Z}$$

82. (МГУ, ДВИ, 243.4) Решите уравнение

$$2 \sin^3 x = \cos 3x.$$

$$\mathbb{Z} \ni \varphi, \pi k + \frac{\pi}{2}, \pi k + \frac{\pi}{2} \in \mathbb{Z}$$

83. (МГУ, ИСАА, 2006) Решите уравнение:

$$3 + 6 \cos 2x + 3 \cos 4x + 2 \cos 6x = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \pi u + \left(\frac{\pi}{2}\right) \in \mathbb{Z}$$

8 Замена переменной

Теория: [Тригонометрические уравнения. 2](#) (раздел 6)

84. (МГУ, ДВИ, 242.4) Решите уравнение

$$\sin x + \sin 2x + \cos x = 1.$$

$$\pi k + \frac{\pi}{2} \in \mathbb{Z}$$

85. (МГУ, ДВИ, 202.3) Решите уравнение

$$\sin x + \cos x = 2\sqrt{2} \sin x \cos x.$$

$$\mathbb{Z} \ni \varphi, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \in \mathbb{Z}$$

86. (МГУ, ДВИ, 224.3) Решите уравнение

$$\frac{\sqrt{2}}{\sin x} + \frac{\sqrt{2}}{\cos x} = \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$\mathbb{Z} \ni \varphi, \pi k \in \mathbb{Z}$$

87. (МГУ, филологич. ф-т, 2005) Решить уравнение

$$2 + \sin x = 3 \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi\mathbb{Z} + \frac{\pi}{2}$$

9 Уравнения с радикалами

Теория:

- [Тригонометрические уравнения. 2](#) (раздел 9)
- [Тригонометрические уравнения с радикалами](#)

88. (МГУ, централизованный экзамен, 2010) Найдите все решения уравнения

$$\sqrt{\operatorname{tg} 3x} = \sqrt{-\operatorname{tg} x},$$

удовлетворяющие неравенству $0 \leq x < \pi$.

$$\frac{\pi}{3}, 0$$

89. (МГУ, химический ф-т, 1994) Решите уравнение

$$\sqrt{\sin 2x} = \sqrt{\cos x - \sin x - 1}.$$

$$2\pi n, -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

90. (МГУ, геологич. ф-т, 2005) Найдите наименьший корень уравнения

$$\sqrt{\cos 2x + x - 11} = \sqrt{x - 15 - 5 \cos x}.$$

$$5\pi$$

91. (МГУ, мехмат, 1999-03.1) Решите уравнение

$$\sqrt[8]{\frac{1 + \cos 4x}{1 - \cos 4x}} + \sqrt[3]{\operatorname{tg} \left(\frac{9\pi}{2} - 2x \right)} = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{\pi}{2} + \frac{8}{x} - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{x}$$

92. (МГУ, мех.мат., 1995-07.3) Решите уравнение

$$\sqrt{\sin 3x} \cdot \operatorname{tg} \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \pi n, \frac{3}{2}\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{19\pi}{12} + 2\pi n, \frac{11\pi}{12} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{3}{2}\pi n, \pi n$$

93. (МГУ, мех.мат., 1997-07.1) Решите уравнение

$$(2 \cos^2 x - \cos x - 1) \sqrt{\operatorname{ctg} x} = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{3}{2}\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \pi n$$

94. (МГУ, ВМК, 1998) Решите уравнение

$$\operatorname{tg} x \cdot \sqrt{\sin x - 2 \cos x - 1} = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{1}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{1}{2} + 2\pi n, \pi n$$

95. («Покори Воробьёвы горы!», 2010, 10–11.2) Решите уравнение

$$\sqrt{25 \sin x + 24} + 2\sqrt{3} \cos x = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \pi n, \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \pi n$$

96. (МГУ, ВМК, 2005) Решите уравнение

$$\sqrt{\operatorname{tg} x + 3} = 5 \cos x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, \pi n$$

97. (МГУ, ВМК, 2005) Решите уравнение

$$\sqrt{\operatorname{ctg} x + 1} = -\sqrt{15} \sin x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, \pi n$$

98. (МГУ, ВМК, 2003.2) Решите уравнение

$$\sqrt{\sin 3x \cos x} = \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right).$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \pi n, \frac{8\pi}{3} + 2\pi n, \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, \frac{10\pi}{3} + 2\pi n, \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \pi n$$

105. («Физтех», 2011) Решите уравнение

$$\sqrt{8 \operatorname{tg} x + 22 \operatorname{ctg} x} = -\sqrt{15} (\sin x + \cos x).$$

$$\mathbb{Z} \ni u, n, z + 2 \arcsin \frac{z}{2} + \frac{\pi}{2}$$

106. (МГУ, мехмат, 1997-03.1) Решите уравнение

$$\sqrt{12 \sin x + 13} = 3 \sin x + 2.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, n, z + \frac{\pi}{2}$$

107. (МГУ, географич. ф-т, 2000) Решите уравнение

$$\sqrt{4 - 2 \cos^2 x + \sin x + \cos 2x} - \sqrt{\frac{\sin x + 1}{\sin x + 2}} - 1 = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, n, z + \frac{\pi}{2} \arcsin \frac{z}{2}$$

108. (МФТИ, 1991) Решите уравнение

$$\sqrt{5 \operatorname{tg} x + 10} = \frac{5}{2} \sin x + \frac{1}{\cos x}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, n, z + \frac{\pi}{2} \arccos \frac{z}{2}$$

109. (МФТИ, 1991) Решите уравнение

$$\sqrt{7 - 4\sqrt{2} \sin x} = 2 \cos x - \sqrt{2} \operatorname{tg} x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, n, z + \frac{\pi}{2}$$

110. (МГУ, ВМК, 1999) Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{1 + \sin(2x - \frac{\pi}{3})}{8}} = -\sin x \cos x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, n, z + \frac{3\pi}{2}$$

111. (МГУ, филологич. ф-т, 2002) Решите уравнение

$$\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x + \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) + \sqrt{3}(\cos x - \sin x)} = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{2}, u\pi + \frac{\pi}{4}$$

10 Уравнения с модулем

Теория:

- [Тригонометрические уравнения. 2](#) (раздел 10)
- [Тригонометрические уравнения с модулем](#)

112. (МФТИ, 1993) Решить уравнение

$$|\cos x| - \cos 3x = \sin 2x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi, u\pi + \frac{\pi}{2}, u\pi + \frac{\pi}{4}$$

113. («Ломоносов», 2013.1) Решить уравнение

$$\sqrt{6} \sin x + \sqrt{2} |\cos x| = 2.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{12}, u\pi + \frac{5\pi}{12}, u\pi + \frac{7\pi}{12}, u\pi + \frac{11\pi}{12}$$

114. («Физтех», 2010) Решить уравнение

$$\sin 3x - 3|\sin x| = \cos 4x - \cos 2x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{3}, u\pi + \frac{2\pi}{3}, u\pi + \frac{4\pi}{3}, u\pi + \frac{5\pi}{3}$$

115. («Физтех», 2015, 10.1, 11.1) Решите уравнение

$$\frac{|\cos x| + \cos 3x}{\sin x \cos 2x} = -2\sqrt{3}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{6}, u\pi + \frac{5\pi}{6}, u\pi + \frac{3\pi}{2}, u\pi + \frac{7\pi}{6}, u\pi + \frac{11\pi}{6}$$

116. («Физтех», 2015, 11.2) Решите уравнение

$$\left(\frac{7}{2} \cos 2x + 2\right) |2 \cos 2x - 1| = \cos x (\cos x + \cos 5x).$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{\pi}{u} + \frac{9}{u} \mp$$

117. («Физтех», 2016, 11.1) Решите уравнение

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{2 \cos 3x}{\cos x} = 5 |\sin x|.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{1} \arcsin \mp$$

118. (МФТИ, 2003) Решить уравнение

$$\frac{\cos 3x \cos 5x + |\sin 5x \sin 3x|}{\sin 2x} = 2 \cos 2x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{\pi}{u}, \frac{24}{5} + \pi n, \frac{24}{5} + \pi n, \frac{13\pi}{15}, \frac{13\pi}{15} + \pi n, \frac{12}{\pi}$$

119. (МГУ, мехмат, 2007.3) Решить уравнение

$$3 \cos x \cdot |3 \sin x + \cos x| = \sin x \cdot |\cos x - 3 \sin x|.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{\sqrt{13}} \arctg \frac{5}{3} = u\pi + \frac{5}{3} \arctg \frac{\pi}{1} - \frac{\pi}{2} = x$$

120. («Ломоносов», 2011) Найдите все решения уравнения

$$|\sin 2x - \cos x| = ||\sin 2x| - |\cos x||$$

на промежутке $(-2\pi; 2\pi]$.

$$\{x \in \mathbb{Z}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} - \} \cap [x; 0] \cap [x - ; x - 2\pi)$$

121. (МФТИ, 2004) Решить уравнение

$$\cos 3x + \cos 2x = 3 |\cos x| - \cos 4x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{2}, \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

122. (МФТИ, 2003) Решить уравнение

$$\frac{\cos 3x \sin 5x + |\cos 5x \sin 3x|}{\cos 2x} = 2 \sin 2x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \left(u x + \frac{9}{x} \right) + \frac{7}{u x} + \frac{71}{x} + \frac{7}{u x}$$

123. (МГУ, мехмат, 2001-05.4) Решить уравнение

$$|\cos 2x \sin 6x| + |\cos 6x \sin 2x| = \sin \frac{3\pi}{11}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \left(u \frac{7}{x} + \frac{88}{x^6} \right)$$

124. («Ломоносов», 2014) Найдите наименьший корень уравнения

$$|\sin 2\pi x + \cos \pi x| = \left| |\sin 2\pi x| - |\cos \pi x| \right|,$$

принадлежащий промежутку $(-2; -\frac{1}{4})$.

$$\mathbb{Z} \ni 1$$

125. (МГУ, мехмат, 2001-07.2) Имеет ли уравнение

$$12 \cos \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) = |4 - 5 \cos x|$$

хотя бы одну пару корней, расстояние между которыми не превосходит $\frac{\pi}{2}$?

126. (МГУ, мехмат, 2006.4) Решить уравнение

$$|1 - 2 \sin x + \cos x| + 2 \sin x + 1 = \cos 2x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \left(u x + 2 \right) + x$$

127. («Ломоносов», 2009.6) Сколько решений на отрезке $[0; \pi]$ имеет уравнение

$$5 \sin x + 4 = |5 \cos x + 2|?$$

$$\text{Одно решение}$$

128. (ОММО, 2009.8) Найдите сумму всех корней уравнения

$$2 \cos 3x + 8|\sin x| - 7 = 0,$$

принадлежащих отрезку $[-\frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}]$.

0

129. (МГУ, ВМК, 2005.6) Решите уравнение

$$12 \cos 2x + 8|\sin x| \sqrt{3 + |\sin x| - 3 \cos 2x} = 11.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \cdot u_{\pi} + \frac{v}{1+\varepsilon^{\lambda}} \text{числа } \pi$$

130. («Ломоносов», 2007.9) Найдите все значения $x \in (-\pi; 0]$, удовлетворяющие уравнению

$$|\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x| + |\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x| + \operatorname{tg} 3x = 0.$$

$$0 \geq x > \frac{9}{\pi} - \frac{\varepsilon}{\pi} - \frac{\varepsilon}{\pi^2}$$

11 Минимаксные задачи (метод оценок)

Теория:

- [Тригонометрические уравнения. 2](#) (раздел 11)
- [Минимаксные задачи в тригонометрии](#)

131. (МГУ, геологич. ф-т, 1983) Решить систему:

$$\begin{cases} 3 \sin 3x + \cos y = -4, \\ x + y = \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

$$\mathbb{Z} \ni u \cdot u_{\pi} - v = n \cdot u_{\pi} + \frac{\varepsilon}{\pi} = x$$

132. (МГУ, ИСАА, 1993) Решить уравнение:

$$\sin^2 x + 3x^2 \cos x + 3x^2 = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \cdot u_{\pi} + v \cdot 0 = x$$

133. (МГУ, ДВИ, 2014.4) Решите уравнение

$$\cos^2 x - \cos x \sin^2 \left(\frac{5x}{4} - \frac{5\pi}{12} \right) + \frac{1}{4} = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni n, \text{ где } \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} = x$$

134. (МГУ, ДВИ, 224.3) Решите уравнение

$$\frac{\sqrt{2}}{\sin x} + \frac{\sqrt{2}}{\cos x} = \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$\mathbb{Z} \ni k, \text{ где } \frac{\pi}{4} + 2k\pi = x$$

135. (МГУ, «Математика вместо ЕГЭ», 2012) Найдите все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$(\cos x + \cos y)(\sin x + \sin y) = 2.$$

$$\mathbb{Z} \ni m, n, \text{ где } (u\pi + \frac{\pi}{2}; v\pi + \frac{\pi}{2}), (u\pi + \frac{\pi}{2}; v\pi + \frac{\pi}{2})$$

136. (МГУ, ДВИ, 222.6) Найдите все возможные значения произведения xy , если известно, что $x, y \in [0, \pi/2)$ и справедливо

$$\frac{1 - \sin(x - y)}{1 - \cos(x - y)} = \frac{1 - \sin(x + y)}{1 - \cos(x + y)}.$$

$$0 = \pi x$$

137. (МГУ, ДВИ, 224.6) Найдите все тройки действительных чисел x, y, z из интервала $(0, \pi/2)$, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} \sin x = \sin y - \sin z \cos(x + z), \\ \cos x = \cos z + \cos y \cos(x + y). \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{4} = z = \pi = x$$

138. (МФТИ, 2005) Решить уравнение

$$(5 \sin x + 12 \cos x)(100 + 48 \cos x - 13 \cos 2x) = 1757.$$

$$\mathbb{Z} \ni n, \text{ где } \frac{13}{5} \arcsin \frac{13}{5} + 2n\pi = x$$

139. (МГУ, ВМК, 2010) Решите уравнение

$$\operatorname{tg}^2(5x + \sin^2 y) + \left| \frac{5x + \cos 2y}{3} + \frac{3}{5x + \cos 2y} \right| = 4 \cos^2 \frac{7\pi}{4}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u : (u\lambda + \frac{\varepsilon}{\varepsilon - u\zeta} \operatorname{сосоле} \frac{\zeta}{1} \mp ; \frac{\varepsilon 1}{u\zeta + \varepsilon} -) : (u\lambda + \frac{\varepsilon}{u\zeta - \varepsilon} \operatorname{сосоле} \frac{\zeta}{1} \mp ; \frac{\varepsilon 1}{u\zeta + \varepsilon})$$

140. («Физтех», 2010) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2} \sin x - \sqrt{3} \cos y = \frac{5}{2}, \\ \sin y + \sqrt{2} \cos x = -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \nu : (u\nu\zeta + \frac{9}{u\varepsilon} - ; \nu\lambda\zeta + \frac{\nu}{u\varepsilon})$$

141. (МГУ, химический ф-т, 1991.4) Решить уравнение:

$$\cos^4 x = \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{2} \cos^2 x \cos 8x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u : \frac{\zeta}{u\nu} + \frac{\nu}{x} = x$$

142. (МГУ, ф-т психологии, 1992) Решить неравенство:

$$3 \sin 2\pi x \geq \sqrt{2} \sin 4\pi x + 3 \cos 2\pi x + \sqrt{32}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u : u + \frac{8}{\varepsilon} = x$$

143. (МГУ, географич. ф-т, 2001.5) Решить уравнение:

$$4 \arcsin(2^x - 7) - \arccos(5^x - 124) = \frac{6\pi}{x}.$$

$$\varepsilon = x$$

144. (МГУ, ВМК, 1992) Решить уравнение:

$$\sqrt{1 + \cos 6x} \sin \frac{3x}{2} = 2\sqrt{2} \cos \frac{2\pi}{3}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u : \frac{\varepsilon}{u\nu\lambda} + \frac{\varepsilon}{x} = x$$

145. (МГУ, географич. ф-т, 1998) Решить уравнение:

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 + 3 \cos^2 \left(2x + \frac{\pi}{6} \right).$$

$$\mathbb{Z} \ni u, n \in \mathbb{Z} + \frac{9}{\pi} = x$$

146. (МГУ, ф-т психологии, 1993) Найти все корни уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{12} \right) + \sin 3x = \cos 3x - \sqrt{2}$$

на отрезке $[-2\pi; 2\pi]$.

$$-\frac{23\pi}{12}, \frac{21}{\pi}$$

147. (МГУ, экономич. ф-т, 1982) Решить уравнение:

$$8 \cos x \cos y \cos(x - y) + 1 = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni \eta, u, (u - \eta)\pi + \frac{\pi}{2} \pm \pi, u\pi + \frac{\pi}{2} \pm \pi = x$$

148. (МГУ, ф-т почвоведения, 1981.5) Решить уравнение:

$$\frac{3 + 2 \cos(x - y)}{2} = \frac{\sin^2(x - y)}{2} + \sqrt{3 + 2x - x^2} \cos^2 \frac{x - y}{2}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, n \in \mathbb{Z} + \frac{\pi}{2} + \pi = \pi, \pi = x$$

149. («Ломоносов», 2008.7) Решить уравнение

$$2 + \cos x = \sqrt{3} \left| \sin \frac{3x}{4} \right| \sin x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, n \in \mathbb{Z} + \frac{\pi}{2}$$

150. (МГУ, ВМК, 1986.5) Решить уравнение:

$$2\sqrt{3} \sin 5x - \sqrt{3} \sin x = \cos 24x \cos x + 2 \cos 5x - 6.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, n \in \mathbb{Z} + \frac{\pi}{2} = x$$

151. (МГУ, ВМК, 1983.6) Решить уравнение:

$$\arcsin^2 x + \arccos^2 x - \frac{5\pi^2}{4} = \sqrt{2 - |y|} \cdot (5 \sin^2 x - 6 \sin x \cos x - 9 \cos^2 x + 3\sqrt[3]{33}).$$

$$\boxed{\frac{5}{4} \pi^2 - \frac{5\pi^2}{4} = x}$$

152. (МГУ, экономич. ф-т, 1990.5) Найти все корни уравнения

$$\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2(2\pi x)} \cos(\pi x) + \sin(\pi x) = \sqrt{2}$$

на отрезке $[-3; 1]$.

$$\boxed{\frac{5}{4} \pi^2 - \frac{5\pi^2}{4} = x}$$

153. (МГУ, биологический ф-т, 1984.5) Решить систему:

$$\begin{cases} y^4 - 4y^3 - 16y^2 - 8xy - 4x^2 + 32y + 64 = 0, \\ \sin 5\pi x + \sin(\pi(2y^2 - x)) - \sqrt{x(x-6) + 13} \cos\left(\pi\left(y^2 + 2x + \frac{1}{2}\right)\right) + \sin(\pi(2y^2 - x)) = 0. \end{cases}$$

$$\boxed{\dots, -6, -10, -9, \dots = u, \frac{7}{10} \sqrt{\pm 1} = \pi, \frac{7}{10} \sqrt{\pm 1} \sqrt{\pm 1} = x; \mathbb{R} \ni \pi, \frac{7}{10} \sqrt{\pm 1} = x}$$