

МГУ. Тригонометрические неравенства

1. (МГУ, физический ф-т, 2008) Найти множество решений неравенства

$$\frac{1}{2} \left(\frac{9x}{\pi} \right)^2 > \cos 3x.$$

Ответ обосновать, используя свойства функций $y = \frac{1}{2} \left(\frac{9x}{\pi} \right)^2$ и $y = \cos 3x$.

$$\left(\infty + ; \frac{6}{\pi} \right) \cap \left(\frac{6}{\pi} - ; \infty - \right)$$

2. (МГУ, мехмат, 2009.1) Найдите все значения аргумента x , при каждом из которых соответствующее значение функции

$$f(x) = \frac{2 \cos \frac{\pi(15+x)}{6} + 1}{\sqrt{14 + 5x - x^2}}$$

положительно.

$$\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2} \right) \cap \left(1; \frac{7}{2} - \right)$$

3. (МГУ, ДВИ, 2015.3) Решите неравенство

$$\cos x + \sqrt{2} \cos 2x - \sin x \geq 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \left[u\pi\tau + \frac{\pi}{x}, u\pi\tau + \frac{\pi}{x} \right] \cap \left[u\pi\tau + \frac{\pi}{x}, u\pi\tau + \frac{\pi}{x} \right] \ni x$$

4. («Покори Воробьёвы горы!», 2017.2) Решите неравенство

$$\left(\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} \right)^7 > 1.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \left(u\pi\tau + \frac{\pi}{x}, u\pi\tau \right)$$

5. («Покори Воробьёвы горы!», 2015.3) Найдите решения неравенства

$$\sqrt{\sin x + \frac{1}{2}} > 2 \sin x$$

на отрезке $\left[-\frac{1}{2}; \frac{8}{3} \right]$.

$$\left[\frac{8}{3}; \frac{9}{\pi} \right] \cap \left(\frac{9}{\pi}; \frac{8}{3} - \right)$$

6. (МФТИ, 1998) Решить неравенство

$$\sqrt[4]{\frac{7 - \cos 4x}{2}} > -2 \sin x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \cdot \left(u\sqrt{7} + \frac{\sqrt{7}}{u}; u\sqrt{7} + \frac{\sqrt{7}}{u} \right)$$

7. («Ломоносов», 2014) Найдите количество всех целочисленных решений неравенства

$$\sqrt{3 \cos \frac{\pi x}{2} - \cos \frac{\pi x}{4} + 1} - \sqrt{6} \cos \frac{\pi x}{4} \geq 0,$$

принадлежащих отрезку [1991; 2013].

6

8. («Покори Воробьёвы горы!», 2016.4) Решите неравенство

$$\sqrt{2 \sin x \cos x} > \cos^3 x - \sin^3 x + \sin x \cos x (\sin x - \cos x).$$

$$\mathbb{Z} \ni u \cdot \left(u\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{u}; u\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{u} \right) \cap \left[u\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{u}; u\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{u} \right]$$

9. («Ломоносов», 2016) Решите неравенство

$$\sqrt{7 + 8 \sin^2 \frac{\pi x}{18}} > 4 \cos^2 \frac{\pi x}{18}.$$

В ответ впишите сумму всех целых решений, принадлежащих отрезку [-18; 35].

297

10. («Покори Воробьёвы горы!», 2017.1) Решите неравенство

$$3 \sin \left(\frac{2x}{3} \right) \geq 5 - 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{3} \right).$$

$$\mathbb{Z} \ni u \cdot \left(u\sqrt{9} + \frac{\sqrt{9}}{u} \right)$$

11. («Покори Воробьёвы горы!», 2015.3) Найдите решения неравенства

$$\sqrt{\cos x + \frac{1}{2}} > 2 \cos x$$

на отрезке $\left[-2; \frac{16}{15}\right]$.

$$\left[-2; -\frac{8}{15}\right] \cap \left(\frac{8}{15}; \frac{8}{15}\right)$$

12. (МФТИ, 1998) Решить неравенство

$$\sqrt[4]{\frac{5 + 3 \cos 4x}{8}} > -\cos x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \left(u\pi\tau + \frac{\pi}{8}; u\pi\tau + \frac{\pi}{8} - \right)$$

13. (МГУ, ВМК, 2008) Решить неравенство

$$\sqrt{1 - \sin 2x} + |\sin x| \leq \cos x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \left[u\pi\tau + \frac{\pi}{2}; u\pi\tau \right]$$

14. (МГУ, ВМК, 2006.4) Найдите все решения неравенства

$$\operatorname{tg} x > \frac{9 - 3 \cos 2x}{3 \sin 2x - 2},$$

удовлетворяющие условию $\frac{\pi}{8} \leq x < \frac{\pi}{2}$.

$$\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2\sqrt{3}+3} \right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$$

15. («Покори Воробьёвы горы!», 2012.3) Найдите суммарную длину отрезков, составляющих решение неравенства

$$|2 \sin x + 3 \cos x| + |\sin x - 3 \cos x| \leq 3 \sin x$$

на отрезке $[0; 4\pi]$.

$$\frac{7}{6} \pi \operatorname{arctg} 2$$

16. («Ломоносов», 2019, 10–11.6) Найдите все решения неравенства:

$$\sin^{2018} x + \cos^{-2019} x \geq \cos^{2018} x + \sin^{-2019} x,$$

принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$.

$$\left[\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right) \cap \left[\frac{\pi}{2}; \pi \right) \cap \left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \cap \left(0; \frac{\pi}{2} - \right)$$

17. (Всеросс., 2016, МЭ, 11.4) Решите неравенство

$$\sin \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{x^2 + 1}{x} \cos \frac{x}{x^2 + 1} > 0.$$

$$(\infty; +0)$$

18. («Ломоносов», 2013) Фигура на координатной плоскости состоит из точек (x, y) , удовлетворяющих при любом $t \in \mathbb{R}$ двум неравенствам:

$$x^2 + y^2 < \pi^2 + t^2, \quad \cos y < 2 + \cos 2x + (4 \sin t - 1) \cos x - \cos 2t.$$

Найдите площадь этой фигуры.

□₂₇

19. («Покори Воробьёвы горы!», 2016.4) Найдите сумму всех принадлежащих отрезку $[-75; 5]$ целых решений неравенства

$$\frac{\sin \frac{\pi x}{2} - \cos \frac{\pi x}{2} + 1}{\sin \frac{\pi x}{2} + \cos \frac{\pi x}{2} - 1} \geq \sin \left(\arcsin \frac{x}{10} \right) - \frac{x}{10}.$$

□₁₁

20. («Покори Воробьёвы горы!», 2010.4) Найдите минимальное натуральное число n , при котором система неравенств

$$\cos x \geq \cos \left(x + \frac{1}{8} \right) \geq \cos \left(x + \frac{2}{8} \right) \geq \dots \geq \cos \left(x + \frac{n}{8} \right)$$

не имеет решений.

□₂₇