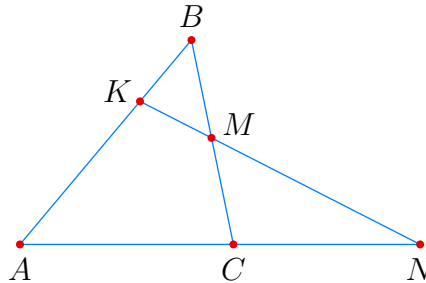


МГУ. Теорема Менелая

В геометрических задачах нередко можно встретить конфигурацию, которую мы будем называть *дельтапланом с вершиной A*:



Для такого дельтаплана справедлива *теорема Менелая*:

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1.$$

Обратите внимание на порядок обхода точек дельтаплана: выходим из вершины A , и дальше понятно. На рисунке обход выбран по часовой стрелке, но можно было бы пойти и в другом направлении:

$$\frac{AC}{CN} \cdot \frac{NM}{MK} \cdot \frac{KB}{BA} = 1.$$

1. Докажите теорему Менелая. Для этого проведите через точку B прямую, параллельную AC , до пересечения с прямой MK в точке D . Найдите две пары подобных треугольников и докажите теорему.

2. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки D и E соответственно так, что $AD : DB = 1 : 2$ и $BE : EC = 2 : 3$. Отрезки AE и CD пересекаются в точке K . Найдите отношения $AK : KE$ и $CK : KD$.

$$\boxed{AK : KE = 5 : 6 \text{ и } CK : KD = 9 : 2}$$

3. В треугольнике со сторонами 2, 3, 4 проведены биссектрисы углов, прилежащих к большей стороне. Найдите отношения, в которых эти биссектрисы делятся точкой их пересечения.

$$\boxed{2 : 1 \text{ и } 7 : 2}$$

4. (МГУ, ДВИ, 224.5) В трапеции $ABCD$ основание AB в два раза больше основания CD . Отрезки AL , BM и DK , где K, L, M — соответственно середины сторон AB, BC, AD , ограничивают треугольник площади 1. Найдите площадь трапеции.

$$\boxed{252}$$

5. («Ломоносов», 2019, 10–11.4) На стороне AC треугольника ABC взяты точки E и K , причём точка E лежит между точками A и K и $AE : EK : KC = 3 : 5 : 4$. Медиана AD пересекает отрезки BE и BK в точках L и M соответственно. Найдите отношение площадей треугольников BLM и ABC .

$\frac{9}{11}$

6. («Ломоносов», 2019, 10–11.4) В треугольнике ABC на стороне BC отмечена такая точка D , что $BD : DC = 1 : 5$, а на стороне AC — точки E и K , причём точка E лежит между точками A и K . Отрезок AD пересекается с отрезками BE и BK в точках M и N соответственно, причём $BM : ME = 3 : 4$, $BN : NK = 2 : 3$. Найдите отношение $AM : ND$.

67 : 021

7. («Ломоносов», 2019, 10–11.4) В треугольнике ABC на стороне AC отмечены такие точки E и K , что $AE = EK = KC$. На стороне BC взята такая точка D , что отрезок AD пересекает отрезки BE и BK в точках N и M соответственно, причём $AN : NM = 4 : 3$. Найдите отношение площади четырёхугольника $CKMD$ к площади треугольника ABC .

$\frac{9}{11}$

8. («Ломоносов», 2019, 10–11.4) В треугольнике ABC на стороне BC отмечена такая точка D , что $BD : DC = 1 : 3$, а на стороне AC — точки E и K , причём точка E лежит между точками A и K . Отрезок AD пересекается с отрезками BE и BK соответственно, причём $BM : ME = 7 : 5$, $BN : NK = 2 : 3$. Найдите отношение $MN : AD$.

11 : 45

9. (МГУ, ДВИ, 2016.6) Ровно в 9:00 из пункта А в пункт Б выехал автомобиль. Проехав две третьих пути, наблюдательный водитель автомобиля заметил, что мимо него в сторону пункта А проехал некий велосипедист. В тот самый момент, когда автомобиль прибыл в пункт Б, из пункта Б в пункт А выехал автобус. Когда до пункта А оставалось две пятых пути, не менее наблюдательный водитель автобуса заметил, что он поравнялся с тем самым велосипедистом. Во сколько приедет велосипедист в пункт А, если известно, что автобус прибыл в пункт А ровно в 11:00? Скорости велосипедиста, автомобиля и автобуса считать постоянными.

12:00

10. («Курчатов», 2021, 11.2) Из деревни в город шёл путник. В 14:00, когда путник прошёл четверть пути, из деревни в город выехал мотоциклист, а из города в деревню — грузовик. В 15:00 мотоциклист догнал путника, а в 15:30 встретил грузовик. Во сколько путник встретит грузовик?

15:48