

МГУ. Системы алгебраических уравнений

Содержание

1	Двойная замена	1
2	Симметричные системы	2
3	Соображения однородности	4
4	Три на три	6
5	Разные приемы	9

Алгебраическая система появилась на ДВИ лишь однажды (в далеком 2014 году), однако для этой фундаментальной темы было решено сделать отдельный листок.

1 Двойная замена

Переход от старых переменных x, y к новым переменным a, b может упростить систему.

1. (МГУ, экономич. ф-т, 2002) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - xy - x = 11, \\ xy^2 - x^2y = -30. \end{cases}$$

(1'9-) :(9'1-) :(7'8-) :(8'7-)

2. (МГУ, геологич. ф-т, 1998) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x(1 + y) = y + 7, \\ x^2y - xy^2 = 6. \end{cases}$$

(01^ - 8- 01^ - 8) :(01^ + 8- 01^ + 8) :(8- 7-) :(7'8)

3. (МФТИ, 2007) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2xy + 4x + 3y = 2, \\ 4x^2y + 3xy^2 + 12x + 9y = 8. \end{cases}$$

(8/2 - 8/8) :(7'8/1-)

4. (МГУ, физический ф-т, 2003) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{17}{2x^2 + 3y} + \frac{12}{3x^2 - 2y} = 3, \\ \frac{6}{3x^2 - 2y} + \frac{34}{2x^2 + 3y} = 3. \end{cases}$$

(8; 7) ; (8; 7-)

5. («Физтех», 2019, 9.2) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + y + 2xy = 11, \\ 2x^2y + xy^2 = 15. \end{cases}$$

(1; 5/2) ; (2; 5/3) ; (8; 1) ; (8; 5/1)

6. («Физтех», 2019, 9.2) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - y - 3xy = -1, \\ 9x^2y^2 + 9x^2 + y^2 - 6xy = 13. \end{cases}$$

(2; 5/1) ; (8; 5/1) ; (1; 1) ; (1; 5/2)

7. («Физтех», 2016, 9.5, 10.4, 11.3) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + \sqrt{2x + 3y} - 3y = 5, \\ 4x^2 + 2x + 3y - 9y^2 = 32. \end{cases}$$

(5; 1/1)

8. («Физтех», 2016, 9.5, 10.5, 11.2) Найдите все пары *положительных* чисел (x, y) , удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} y - 2\sqrt{xy} - \sqrt{\frac{y}{x}} + 2 = 0, \\ 3x^2y^2 + y^4 = 84. \end{cases}$$

(61/18) ; (9/12) ; (8; 5/1)

2 Симметричные системы

Система называется симметричной, если она не меняет своего вида при замене x на y и y на x . В таких системах отлично работает двойная замена $x + y = a$ и $xy = b$.

9. Покажите, что

$$x^2 + y^2 = a^2 - 2b, \quad x^3 + y^3 = a^3 - 3ab, \quad x^4 + y^4 = a^4 - 4a^2b + 2b^2.$$

10. (МГУ, ф-т почвоведения, 2007)

$$\begin{cases} x + y + xy = 7, \\ x^2 + y^2 + xy = 13. \end{cases}$$

(1'3):(3'1)

11. («Покори Воробьёвы горы!», 2010.3) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2y + x + xy^2 + y + 5 = 0, \\ x + y + xy + 5 = 0. \end{cases}$$

(0'5-):(5-0):(3'2-):(2-'3)

12. Решите систему

$$\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17, \\ x + xy + y = 5. \end{cases}$$

(1'2):(2'1)

13. Решите систему

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 17(x + y)^2, \\ xy = 2x + 2y. \end{cases}$$

(0'0):(0'1):(1-2):(1-2):(3'6):(6'3)

14. (МГУ, ДВИ, 2014.6) Найдите все положительные x, y , удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x^{\frac{3}{2}} + y = 16, \\ x + y^{\frac{2}{3}} = 8. \end{cases}$$

8 = n, n = x

15. Решите систему

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 3x - 3y + xy = -1, \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y + 3xy = 1. \end{cases}$$

(1'1)

16. Решите систему

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 = 20, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{4}. \end{cases}$$

$$\left(\frac{z}{17^{\wedge}-9-}, \frac{z}{17^{\wedge}+9-} \right); \left(\frac{z}{17^{\wedge}+9-}, \frac{z}{17^{\wedge}-9-} \right); (1; 4); (4; 1)$$

17. (ОММО, 2016.5)

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 19, \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 931. \end{cases}$$

$$(9-; 9-); (9-; 9-); (9; 9); (9; 9)$$

18. («Физтех», 2021, 9.4) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 2x^2y^2 = 3, \\ x^4 + y^4 + \frac{2}{3}x^2y^2 = 17. \end{cases}$$

$$(z^{\wedge} \mp; z^{\wedge} -); (z^{\wedge} \mp; z^{\wedge} \wedge); (z^{\wedge} \mp; z^{\wedge} -); (z^{\wedge} \mp; z^{\wedge} \wedge)$$

3 Соображения однородности

19. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 17, \\ 2xy - x^2 = 3. \end{cases}$$

$$\left(\frac{z^{\wedge}}{9} - , \frac{z^{\wedge}}{1} - \right); \left(\frac{z^{\wedge}}{9}, \frac{z^{\wedge}}{1} \right); (z-; 9-); (z; 9)$$

20. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 = 20, \\ x^2 - 4xy + 7y^2 = 13. \end{cases}$$

$$\left(\frac{z^{\wedge} z}{1} - , \frac{z^{\wedge} z}{21} \right); \left(\frac{z^{\wedge} z}{1}, \frac{z^{\wedge} z}{21} - \right); (z-; 9-); (z; 9)$$

21. (МГУ, геологич. ф-т, 2003) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 + 3 = 0, \\ 6y^3 - 18y - 13x^3 - 3x = 0. \end{cases}$$

$$\left(\frac{611}{9} \wedge_{11} - , \frac{611}{9} \wedge - \right); \left(\frac{611}{9} \wedge_{11}, \frac{611}{9} \wedge \right); (z^{\wedge} -; 0); (z^{\wedge} ; 0)$$

22. (МФТИ, 2008) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 = y^4 + y, \\ 5x = \frac{2y}{x} + y^2. \end{cases}$$

$$\left(\frac{5}{3}, -\frac{11}{3}\right); \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

23. («Физтех», 2012.2) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{5x}{y} - \frac{9y}{x} + 10 = \frac{6}{xy}, \\ \frac{2x}{y} + \frac{3y}{x} + 4 = \frac{9}{xy}. \end{cases}$$

$$(1, 8); (1, -8); (1, -1); (1, 1)$$

24. («Физтех», 2014.1) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y^3 - x^2 - xy + 1 = 0, \\ 2y^3 - 3x^2 - 5xy - 2y^2 + 2 = 0. \end{cases}$$

$$\left(\frac{2}{\sqrt{2}+1}, 1\right); \left(\frac{2}{\sqrt{2}-1}, 1\right); (1, 2); (1, -1); (1, 1)$$

25. (МФТИ, 2000) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x^3}{2y} + 3xy = 25, \\ \frac{y^3}{x} - 2xy = 16. \end{cases}$$

$$(2, 4); (-2, -4)$$

26. (МФТИ, 2000) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x^3}{y^2} + \frac{3y}{4x} = 2, \\ \frac{8y}{x^2} - \frac{6x}{y} = 5. \end{cases}$$

$$(2, 4); \left(\frac{256}{375}, -\frac{5625}{2048}\right)$$

32. («Покори Воробьёвы горы!», 2019, 9.6) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 = y + z, \\ y^2 = z + x, \\ z^2 = x + y \end{cases}$$

при условии $x, y, z > 0$. В ответе укажите: если решений нет, то 0, если решение одно — произведение xuz , если решений несколько — сумму произведений xuz для каждого решения.

8

33. («Высшая проба», 2017, 8.3) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x} = \frac{y+z}{2}, \\ \sqrt{y} = \frac{z+x}{2}, \\ \sqrt{z} = \frac{x+y}{2} \end{cases}$$

и доказать, что других решений, кроме найденных, нет.

(1'1'1):(0'0'0)

34. (ОММО, 2012.6) Решите систему

$$\begin{cases} \frac{ab}{a+b} = 1, \\ \frac{bc}{b+c} = 2, \\ \frac{ca}{c+a} = 4. \end{cases}$$

(8 - \frac{5}{8}, \frac{5}{8})

35. (ОММО, 2017.5) Решите систему

$$\begin{cases} x + y + 2 - 4xy = 0, \\ y + z + 2 - 4yz = 0, \\ z + x + 2 - 4zx = 0. \end{cases}$$

(\frac{5}{1} - \frac{5}{1} - \frac{5}{1} -) :(1'1'1)

36. («Физтех», 2009.7) Решите систему

$$\begin{cases} 2x^2 = yz - 2x, \\ 2y^2 = -xz + 2y, \\ 2z^2 = -xy + 2z. \end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{9}\right); \left(\frac{1}{9}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{9}\right); \left(\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{2}\right); (z, z, z); (1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1); (0, 0, 0)$$

37. (ОММО, 2018.5) Решите систему

$$\begin{cases} x^2 = (y - z)^2 - 3, \\ y^2 = (z - x)^2 - 7, \\ z^2 = (x - y)^2 + 21. \end{cases}$$

$$(5, -3, -1); (5, 3, 1)$$

38. («Физтех», 2015, 10.3, 11.3)

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y+z} = \frac{1}{12}, \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{x+z} = \frac{1}{6}, \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x+y} = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$(-4, 2, 1)$$

39. (ОММО, 2011.8)

$$\begin{cases} x + y + z = 13, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 61, \\ xy + xz = 2yz. \end{cases}$$

$$(4, 6, 3)$$

40. («Физтех», 2009.7)

$$\begin{cases} x^2 - z^2 = 2x - 3y + 4z, \\ z^2 - y^2 = x + 4y - 3z, \\ y^2 - x^2 = -3x - 5y + z. \end{cases}$$

$$\left(\frac{3}{2\sqrt{1-3}}, \frac{9}{2\sqrt{1-1}}, \frac{9}{2\sqrt{1-1}}\right); \left(\frac{3}{2\sqrt{1+3}}, \frac{9}{2\sqrt{1+1}}, \frac{9}{2\sqrt{1+1}}\right); (2, -1, -1); (1, 1, 0); (0, 0, 0)$$

5 Разные приемы

41. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = 158, \\ 3x^2y + y^3 = -185. \end{cases}$$

(9; -7)

42. (МГУ, филологич. ф-т, 2007) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2y - 3 = 0, \\ y^2 + 2x - 3 = 0. \end{cases}$$

(9; 9); (-1; -1)

43. (МГУ, географич. ф-т, 2002) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 = 5x + y, \\ y^3 = 5y + x. \end{cases}$$

$$\left(\frac{z}{z^2 + 5z - 5}, \frac{z}{z^2 - 5z - 5} \right); \left(\frac{z}{z^2 - 5z - 5}, \frac{z}{z^2 + 5z - 5} \right); \left(\frac{z}{z^2 + 5z - 5}, \frac{z}{z^2 - 5z - 5} \right); \left(\frac{z}{z^2 - 5z - 5}, \frac{z}{z^2 + 5z - 5} \right);$$

$$; (9^{\wedge} - 9^{\wedge} -); (9^{\wedge} \cdot 9^{\wedge}); (z; z -); (z -; z); (0; 0)$$

44. («Физтех», 2016, 9.5, 10.5, 11.3) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 - 2x - 2y + 10 = 0, \\ x^3y - xy^3 - 2x^2 + 2y^2 - 30 = 0. \end{cases}$$

(-1; -4)

45. («Физтех», 2022, 9.3) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy}, \\ x + y^2 = 5. \end{cases}$$

$$(1; 4); \left(\frac{z}{12z^2 + 1}, \frac{z}{12z^2 + 1} \right)$$

46. («Физтех», 2022, 9.2) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 25y^2} = 50, \\ 5y + \sqrt{x^2 - 25y^2} = 1. \end{cases}$$

(7; -67)

47. (МФТИ, 2006) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5\sqrt[3]{2x^2y^3} = 2(x^2 + y^2), \\ 3\sqrt[3]{4x^4y^3} = 4(y^2 - x^2). \end{cases}$$

(0; 0); (-2; 4); (2; 4)

48. (МФТИ, 2004) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y^7 + 2y^6 + 3x^2 = 0, \\ y^4 - xy = \frac{x^3}{y^4} - \frac{x^2}{y}. \end{cases}$$

(-125; -9); (-9; 9); (-9; -9)

49. (МФТИ, 2008) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} xy + y^2 - 2x^2 + 10x + 8y + 12 = 0, \\ x^2 - y^2 + 7 = 0. \end{cases}$$

(-3; 4); (1/29; 3/8); (1/29; -3/8)

50. (МФТИ, 2005) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 8x^2y - 3x^4 = 4, \\ 8y^3 - 3x^2y^2 = 2. \end{cases}$$

(1; 2); (1; 2)

51. (МФТИ, 2006) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{y^2}{x^2}(3+2x) = 3y-x, \\ y^2 + 2xy = 3x^2 - 2y. \end{cases}$$

$(\frac{7}{1}, \frac{7}{1}) ; (\frac{98}{8}, \frac{98}{12})$

52. (МФТИ, 2002) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y + \frac{x^3}{y^3} = \frac{y^3}{x} + \frac{x^2}{y}, \\ \frac{1}{y} + \frac{y^3}{x^3} + \frac{10}{x^2} = 0. \end{cases}$$

$(4, -2)$

53. (МФТИ, 1996) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 - 10x - 8y - 12 = 0, \\ 2x^2 + 3xy + y^2 + x - y - 6 = 0. \end{cases}$$

$(7, 0) ; (4, 7) ; (3, 3)$