# МГУ. Расстояния и углы в пространстве

**1.** (*МГУ, ДВИ, 225.7*) Дана правильная треугольная пирамида $ABCS$ с основанием $ABC$ и вершиной $S$. Плоскость $\pi$ перпендикулярна ребру $AS$ и пересекает рёбра $AS$, $BS$ в точках $D$, $E$ соответственно. Известно, что $SD = AD$ и $SE = 2BE$. Найдите косинус угла между ребром $AS$ и плоскостью основания $ABC$.

$\boxed{\frac{1}{\sqrt{6}}}$

**2.** (*МГУ, ДВИ, 223.7*) Высота правильной треугольной призмы $ABCA'B'C'$ с основанием $ABC$ и боковыми рёбрами $AA'$, $BB'$, $CC'$ равна 1. Найдите длину ребра основания, если известно, что $AB' \perp BC'$.

$\boxed{\sqrt{2}}$

**3.** (*МГУ, ДВИ, 2014.7*) В основании прямой призмы лежит правильный треугольник со стороной 1. Высота призмы равна $\sqrt{2}$. Найдите расстояние между скрещивающимися диагоналями боковых граней.

$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{3}}$

**4.** (*МГУ, ДВИ, 241.7*) Плоскость $\pi$ перпендикулярна ребру $SA$ правильной треугольной пирамиды $ABCS$ с вершиной $S$ и основанием $ABC$, делит это ребро в отношении $1 : 2$ (считая от вершины $S$) и проходит через середину ребра $SB$. Найдите угол между плоскостью $\pi$ и плоскостью основания пирамиды.

$\boxed{\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2}{7}} = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}}$

**5.** (*МГУ, ДВИ, 206.6*) Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ с основанием $ABCD$ и боковыми рёбрами $AA'$, $BB'$, $CC'$, $DD'$. Найдите расстояние между прямой, проходящей через середины рёбер $AB$ и $AA'$, и прямой, проходящей через середины рёбер $BB'$ и $B'C'$, если ребро куба равно 1.

$\boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

**6.** (*МГУ, ДВИ, 234.7*) Расстояния от (внутренней) диагонали прямоугольного параллелепипеда до его рёбер, не имеющих с этой диагональю общих точек, равны $\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt{\frac{6}{5}}$. Найдите объём этого параллелепипеда.

$\boxed{\sqrt{6}}$

**7.** (*МГУ, ДВИ, 202.6*) Дан тетраэдр $ABCD$. Известно, что

$$AB = BC = CD = 5, \qquad CA = AD = DB = 6.$$

Найдите косинус угла между рёбрами $BC$ и $AD$.

$\boxed{11/30}$

**8.** (*Моск. матем. регата, 2011, 10*) В кубе $ABCDA'B'C'D'$ с ребром 1 точки $T$, $P$ и $Q$ — центры граней $AA'B'B$, $A'B'C'D'$ и $BB'C'C$ соответственно. Найдите расстояние от точки $P$ до плоскости $ATQ$.

$\boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

**9.** (*«Физтех», 2010.4*) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $ABCD$ равна $\sqrt{2}$, угол между боковым ребром и плоскостью основания равен $\operatorname{arctg} 2$. Точка $K$ лежит на высоте $SO$, причём $KO : SO = 3 : 4$. Через точку $K$ проведена плоскость $\Pi$, перпендикулярная прямой $SC$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью $\Pi$, расстояние от точки $B$ до плоскости $\Pi$ и угол между плоскостью $\Pi$ и прямой $SB$.

$\boxed{\frac{1}{3\sqrt{5}};\ \frac{3}{\sqrt{5}};\ \arcsin\frac{4}{5}}$

**10.** (*«Физтех», 2023, отбор, 11*) На рёбрах $BC$, $AB$ и $A_1B_1$ параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечены точки $K$, $L$ и $M$ соответственно так, что $BC : BK = AL : LB = B_1M : MA_1 = 2$. Прямая $\ell$ пересекает прямые $CD$, $C_1K$, $B_1D_1$ и $LM$ в четырёх различных точках $E$, $F$, $G$ и $H$ соответственно. Найдите длину отрезка $HE$, если известно, что $GE = 3$.

$\boxed{5}$