

МГУ. Прогрессии

Арифметическая и геометрическая прогрессии — тема обширная и популярная, регулярно появляющаяся на ДВИ МГУ в последние годы. Данный задачник содержит все задачи на прогрессии, которые предлагались на ДВИ, а также задачи прежних вступительных экзаменов в МГУ и олимпиадные задачи.

Теорию можно почитать в следующих листках:

- [Арифметическая прогрессия](#),
- [Геометрическая прогрессия](#).

1. (МГУ, ДВИ, 201.2) Найдите сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 105, которые делятся на 3, но не делятся на 5.

1470

2. (МГУ, ДВИ, 202.2) Дана возрастающая геометрическая прогрессия b_1, b_2, b_3, \dots , состоящая из положительных чисел. Известно, что сумма первого и третьего членов этой прогрессии равна второму члену, умноженному на $10/3$. Найдите отношение

$$b_6 + b_7 + b_8 + b_9 + b_{10} \quad \text{к} \quad b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5.$$

243

3. (МГУ, ДВИ, 203.2) Числа $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{20}$ образуют арифметическую прогрессию. Известно, что сумма первых десяти членов этой прогрессии равна 9, а сумма последних десяти членов равна 11. Найдите сумму

$$a_6 + a_7 + \dots + a_{14} + a_{15}.$$

10

4. (МГУ, ДВИ, 204.2) Дана арифметическая прогрессия. Её двадцатый член равен 1, а член с номером 2000 равен 199. Найдите член этой прогрессии с номером 2020.

201

5. (МГУ, ДВИ, 205.2) Дана геометрическая прогрессия. Её четвёртый член равен 5, а член с номером 54 равен 160. Найдите член этой прогрессии с номером 64.

078

6. (МГУ, ДВИ, 206.2) Сумма первых ста членов арифметической прогрессии равна 750. Найдите член этой прогрессии с номером 99, если известно, что второй член этой прогрессии равен 7.

8

7. (МГУ, ДВИ, 221.2) Сумма первых пятнадцати членов арифметической прогрессии в два раза больше суммы первых десяти членов. Найдите первый член этой прогрессии, если известно, что пятый её член равен 7.

8

8. (МГУ, ДВИ, 222.2) Сумма первых трёх членов геометрической прогрессии в два раза больше разности между первым и четвёртым её членами. Найдите первый член этой прогрессии, если известно, что сумма первых семи её членов равна 127.

64

9. (МГУ, ДВИ, 223.2) Дана возрастающая арифметическая прогрессия, состоящая из положительных чисел. Произведение третьего и четвёртого членов этой прогрессии в два раза больше произведения первого и шестого её членов. Найдите разность этой прогрессии, если известно, что восьмой её член равен 32.

4

10. (МГУ, ДВИ, 224.2) Положительные числа a , b , c образуют непостоянную геометрическую прогрессию. Числа a , $4b$, $7c$ образуют арифметическую прогрессию. Найдите отношение a/c .

49

11. (МГУ, ДВИ, 225.2) Сумма второго и восьмого членов возрастающей геометрической прогрессии равна $9\sqrt{2}$. Произведение четвёртого, пятого и шестого членов этой прогрессии равно 64. Найдите разность между девятым и первым членами этой прогрессии.

15

12. (МГУ, ДВИ, 226.2) Числа $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{30}$ образуют арифметическую прогрессию. Известно, что

$$a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{30} = 45, \quad a_3 + a_6 + a_9 + \dots + a_{30} = 100.$$

Найдите разность этой прогрессии.

14

13. (МГУ, ДВИ, 236.2) Найдите четыре числа a, b, c, d , если известно, что они образуют возрастающую геометрическую прогрессию, что $a + d = 28$ и что $b + c = 12$.

28 = p, 6 = r, 8 = q, 1 = v

14. (МГУ, ДВИ, 237.2) Возрастающая геометрическая прогрессия a_1, a_2, a_3, \dots удовлетворяет условиям $a_3 - a_1 = 3, a_7 - a_3 = 60$. Найдите сумму первых семи членов этой прогрессии.

127

15. (МГУ, ДВИ, 241.1) Натуральные числа a_1, \dots, a_n образуют строго возрастающую арифметическую прогрессию. Найдите все возможные значения n , если известно, что n нечётно, $n > 1$ и сумма $a_1 + \dots + a_n$ равна 2024.

$n = 11, 23$

16. (МГУ, ДВИ, 245.2) Числа a_1, a_2, \dots, a_{20} образуют арифметическую прогрессию. Найдите её разность, если известно, что $a_1^2 + a_3^2 + \dots + a_{19}^2 = 1330, a_2^2 + a_4^2 + \dots + a_{20}^2 = 1540$ и $a_{10} + a_{11} = 21$.

1

17. (МГУ, физический ф-т, 1992) Девятый член арифметической прогрессии в 2 раза больше десятого, а сумма шестого и двенадцатого членов равна 8. Найти первый член и разность прогрессии.

$20 - n$

18. (МГУ, физический ф-т, 1979) Седьмой член арифметической прогрессии равен 21, а сумма первых семи членов равна 105. Найти первый член и разность прогрессии.

$9 \text{ и } 6$

19. (МГУ, ИСАА, 1993) Сумма третьего и пятого членов арифметической прогрессии равна 8. Найти сумму первых семи её членов.

28

20. (МГУ, биологич. ф-т, 1991) Лыжник проходил каждый следующий виток круговой трассы на одно и то же время дольше, чем предыдущий. На второй и четвёртый витки он затратил в сумме 3 мин 20 с. За какое время лыжник прошёл первые пять витков?

$8 \text{ мин } 20 \text{ с}$

21. (МГУ, экономич. ф-т, 1987) В магазине продано 12 т орехов трёх сортов по цене 6, 4 и 2 руб/кг на общую сумму 42000 рублей. Количества проданных орехов первого, второго и третьего сорта (в данном порядке) образуют арифметическую прогрессию. Найти эти количества.

$2,5 \text{ т}; 4 \text{ т}; 5,5 \text{ т}$

22. (МГУ, ВМК, 1988) Найти сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии, если сумма третьего, седьмого, четырнадцатого и восемнадцатого её членов равна 10.

05

23. (МГУ, ВМК, 1995) Разность арифметической прогрессии отлична от нуля, а сумма членов с четвёртого по четырнадцатый равна 77. Найти номер того её члена, который равен 7.

6

24. (МГУ, ВМК, 1990) Среди первых двадцати пяти членов арифметической прогрессии сумма членов с нечётными номерами на 19 больше, чем с чётными. Найти двенадцатый член прогрессии, если её двадцатый член равен утроенному девятому.

17

25. (МГУ, социологич. ф-т, 2004) Три числа, являющиеся длинами рёбер прямоугольного параллелепипеда с диагональю 6, образуют арифметическую прогрессию. Кубы этих чисел тоже образуют арифметическую прогрессию. Найдите эти числа.

$2\sqrt[3]{3}, 2\sqrt[3]{3}, 2\sqrt[3]{3}$

26. (МГУ, ВМК, 2005) Последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, являются арифметическими прогрессиями, $a_{11} = 32$, $b_{21} = 43$. Последовательность $\{c_n\}$ определяется равенствами $c_n = (-1)^n \cdot a_n + (-1)^n \cdot b_n$. Сумма первых сорока членов последовательности $\{c_n\}$ равна 100, а сумма первых её двадцати трёх членов равна -60 . Найдите b_{40} и сумму первых ста членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$.

81: 1505

27. (МГУ, ВМК, 2005) В убывающей арифметической прогрессии разность девятого и четвёртого членов равна третьему, а сумма квадратов первого и второго членов равна 4. Найдите сумму первых двадцати пяти членов этой прогрессии.

— 150

28. (МГУ, геологич. ф-т, 2005) В арифметической прогрессии квадрат суммы третьего и четвёртого членов равен сумме второго и пятого членов. Чему равна сумма первых шести членов этой прогрессии?

3 или 0

29. (МГУ, МШЭ, 2005) Найдите четыре числа, которые образуют арифметическую прогрессию, если сумма крайних чисел равна 18, а второе число меньше третьего на 20%.

6, 8, 10, 12

30. (МГУ, географич. ф-т, 2006) Числа y и z таковы, что последовательность $1, \sqrt{y}, \sqrt{z}$, а также последовательность $1, y - 1, z - y$ являются арифметическими прогрессиями. Найдите разность второй прогрессии.

2

31. (МГУ, геологич. ф-т, 2007) Сумма первых пятнадцати членов арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, больше 337, но меньше 393. Чему равен восьмой член этой прогрессии, если известно, что он кратен четырём?

24

32. (МГУ, экономич. ф-т, 2007) Три числа $12x$, $x^2 - 5$ и 4 в указанном порядке образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Найдите x и укажите разность этой прогрессии.

— 1: 8

33. (МГУ, ф-т психологии, 1987) Сумма первых пяти членов геометрической прогрессии на $3/2$ больше, чем сумма первых трёх членов, а пятый член равен учетверённому третьему. Найти четвёртый член прогрессии, если знаменатель положителен.

21

34. (МГУ, химический ф-т, 1989) Произведение первого, третьего и одиннадцатого членов геометрической прогрессии равно 8. Найти произведение второго и восьмого её членов.

4

35. (МГУ, ф-т почвоведения, 1995) Четвёртый член арифметической прогрессии равен половине второго, который на 36 больше, чем третий член некоторой геометрической прогрессии. Найти первый член арифметической прогрессии, если он вдвое больше первого члена геометрической прогрессии и впятеро больше второго члена геометрической прогрессии.

09

36. (МГУ, физический ф-т, 2002) Числа a_1, a_2, a_3 образуют арифметическую прогрессию, а числа $a_1 - 1, a_2 + 1, a_3 + 15$ — геометрическую. Найти a_1 , если $a_1 + a_2 + a_3 = 24$.

82 или 4

37. (МГУ, географич. ф-т, 2002) Найти два различных корня уравнения $x^2 - 6px + q = 0$, если p, x_1, x_2, q — геометрическая прогрессия.

4 = 2x, 2 = 1x или 6 = 2x, 3 = 1x

38. (МГУ, ВМК, 2003) Сумма первых тридцати членов геометрической прогрессии с ненулевым первым членом и ненулевым знаменателем равна удвоенной сумме её первых десяти членов. Найдите знаменатель этой прогрессии.

$\frac{1}{1-q} \sqrt[10]{1-q}$

39. (МГУ, ф-т фунд. медицины, 2003) Найти все x , при которых $\sin x, \operatorname{tg} x$ и $\frac{1}{\cos x}$ являются последовательными членами геометрической прогрессии.

$\mathbb{Z} \ni u, u\sqrt{x} + \frac{1}{x}$

40. (МГУ, географич. ф-т, 2003) Разность девятого и третьего членов знакопередающей геометрической прогрессии равна её шестому члену, умноженному на $24/5$. Найдите отношение десятого члена прогрессии к её пятому члену.

$\frac{8}{5} - 5$

41. (МГУ, геологич. ф-т, 2003) Целые числа k, n и t в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию с целым знаменателем. Известно, что число t на 39 больше, чем k , а прогрессия не является возрастающей. Чему равна сумма чисел k, n и t ?

69

42. (МГУ, филологич. ф-т, 2003) Даны такие арифметическая прогрессия a_n и геометрическая прогрессия b_n , что $a_1 = b_1, a_4 = b_3, a_2 a_3 - b_2^2 = 8$. Найдите разность арифметической прогрессии.

27

43. (МГУ, ВМК, 2004) Четыре числа a_1, a_2, a_3 и a_4 образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Если к ним прибавить 6, 7, 6 и 1 соответственно, то получатся числа, образующие в том же порядке арифметическую прогрессию. Найдите числа a_1, a_2, a_3 и a_4 .

2, 4, 8, 16

44. (МГУ, социологич. ф-т, 2005) Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия содержит член $b_n = 1/8$. Отношение суммы членов прогрессии, стоящих перед b_n , к сумме членов, стоящих после b_n , равно 14. Найдите n , если сумма всей прогрессии равна 2.

4

45. (МГУ, химический ф-т, 2007) Положительные числа b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 образуют геометрическую прогрессию, а числа $b_5, 6b_3, 27b_1$ образуют арифметическую прогрессию. Найдите все возможные знаменатели геометрической прогрессии b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 .

$\sqrt[3]{3}; 3$

46. (МГУ, ф-т почвоведения, 2007) Сумма положительной бесконечно убывающей геометрической прогрессии в 4 раза больше её второго члена. Во сколько раз второй член меньше первого?

В 2 раза

47. («Ломоносов», 2007) Какие значения может принимать выражение

$$\log_{b_{11}b_{50}}(b_1b_2 \dots b_{60}),$$

где b_1, b_2, \dots — геометрическая прогрессия?

0; 3

48. («Физтех», 2024, 11.1) Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 143° . Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?

81

49. («Физтех», 2024, 11.1) Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{(25x-9)(x-6)}$, девятый член равен $x+3$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$.

$0 = x, 18 = x$

50. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 10–11.2) Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если её второй член равен 3, а сумма первых трёх её членов равна 13.

$\frac{7}{27}$

51. (ОММО, 2023.1) Точка R_1 — середина отрезка ST ; точка R_2 — середина отрезка SR_1 ; для каждого $n \geq 3$ точка R_n — середина отрезка $R_{n-2}R_{n-1}$. Пусть R — предельное положение точки R_n при $n \rightarrow \infty$. Найдите длину отрезка RT , если длина отрезка ST равна 15.

01

52. («Покори Воробьёвы горы!», 2019, 10–11.1) Сумма шести первых членов геометрической прогрессии, состоящей из положительных чисел, в 344 раза больше суммы трех ее первых членов. Найдите знаменатель прогрессии.

2

53. («Покори Воробьёвы горы!», 2020, 11.1) Геометрическая прогрессия состоит из шести членов. Среднее арифметическое её первых четырёх членов равно 15, а среднее арифметическое последних четырёх членов равно 60. Чему может быть равен последний член прогрессии?

128 или 384

54. (ОММО, 2024.1) Все члены геометрической прогрессии положительны. Сумма первых 11 членов прогрессии равна 6, а сумма обратных величин этих членов равна 24. Найдите шестой член прогрессии.

$\frac{2}{1}$

Прогрессии и оценки

Это более сложная тема, таких задач на ДВИ не встречалось. Но познакомиться с ней стоило бы: задачи не простые, но очень красивые.

55. («Покори Воробьёвы горы», 2006) Первый член арифметической прогрессии равен -12 , разность равна $24/11$. Найдите сумму первых n членов этой прогрессии при условии, что она меньше -39 .

$-\frac{432}{11}$

56. (МГУ, мехмат, 2006) Первый член арифметической прогрессии меньше 0, сотый не меньше 74, а двухсотый меньше 200. Количество членов прогрессии на интервале $(0,5; 5)$ ровно на два меньше, чем на отрезке $[20; 24,5]$. Найдите первый член и разность прогрессии.

$-\frac{7}{3}; \frac{7}{1}$

57. (ОММО, 2021.1) Сумма первых трёх членов арифметической прогрессии, а также сумма первых шести её членов — натуральные числа. Кроме того, её первый член d_1 удовлетворяет неравенству $d_1 \geq \frac{1}{2}$. Какое наименьшее значение может принимать d_1 ?

6/5

58. (МГУ, мехмат, 2003-03.1) Найти первый член целочисленной арифметической прогрессии, у которой сумма первых шести членов отличается от суммы следующих шести членов менее чем на 450, а сумма первых пяти членов превышает более чем на 5 сумму любого другого набора различных членов этой прогрессии.

75

59. («Физтех», 2021, 11.1) S — сумма первых 10 членов возрастающей арифметической прогрессии a_1, a_2, a_3, \dots , состоящей из целых чисел. Известно, что $a_6 a_{12} > S + 1$, $a_7 a_{11} < S + 17$. Укажите все возможные значения a_1 .

0; 1; -2; -4; -5; -6;

60. («Покори Воробьёвы горы!», 2013, 10-11.2) Несколько чисел образуют арифметическую прогрессию, причём их сумма равна 63, а первый член в полтора раза больше разности прогрессии. Если все члены прогрессии уменьшить на одну и ту же величину так, чтобы первый член прогрессии был равен разности прогрессии, то сумма всех чисел уменьшится не более, чем на 8, но не менее, чем на 7. Определите, какой может быть разность этой прогрессии.

8/12 или 2

61. (МГУ, мехмат, 2003-07.3) Первый член конечной геометрической прогрессии с целочисленным знаменателем q меньше последнего, но не более чем на 17, а сумма ее членов со второго по последний не меньше 26. Найти q .

2

62. (МГУ, мехмат, 2002-03.3) Сумма первых четырнадцати членов арифметической прогрессии равна 77. Известно, что ее первый и одиннадцатый члены — натуральные числа. Чему равен восемнадцатый член прогрессии?

5-

63. (МГУ, мехмат, 2004-03.3) Найдите все возможные значения суммы убывающей арифметической прогрессии

$$a_1 = \frac{6m - m^2 - 9}{6m - m^2}; \quad a_2 = \frac{6m - m^2 - 12}{6m - m^2}; \quad \dots; \quad a_n = \frac{-10}{6m - m^2},$$

где m — некоторое целое число.

4/11; 5/12;