

МГУ. Последовательности

Данная тема (характерная больше для олимпиад) мелькнула на ДВИ в 2023 году. Что ж, готовимся и решаем олимпиадные задачи :-)

1. (МГУ, ДВИ, 231.2) Дана последовательность a_0, a_1, a_2, \dots действительных чисел. Найдите a_8 , если известно, что $a_1 = 1$ и что для любой пары индексов n, m , таких что $n \geq m \geq 0$, справедливо равенство

$$a_{n+m} + a_{n-m} = 2(a_n + a_m).$$

79

2. (МГУ, ДВИ, 233.2) Последовательность a_1, a_2, a_3, \dots получается из последовательности натуральных чисел вычёркиванием всех полных квадратов (то есть $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 6, a_5 = 7, a_6 = 8, a_7 = 10$, и т. д.). Найдите a_{2023} .

890Z

3. (МГУ, ДВИ, 234.2) Дана последовательность a_1, a_2, a_3, \dots действительных чисел. Найдите a_1 , если известно, что $a_8 = 8$ и что для любого индекса n справедливо равенство

$$a_{n+1} = \sqrt[n]{2} a_n + (\sqrt[n]{2} - 1) n - 1.$$

L

4. (МГУ, ДВИ, 235.2) Последовательность a_1, a_2, a_3, \dots действительных чисел определяется равенствами

$$a_n = (1 + \sqrt{n}) \left(\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} \right).$$

Найдите a_{2023} .

220Z

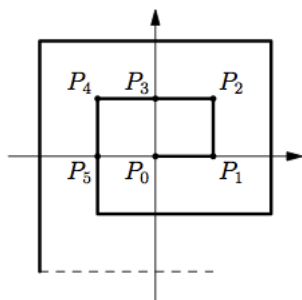
5. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 9.2) Аня не сказала Мише, сколько ей лет, но сообщила, что на каждый её день рождения мама бросает в копилку столько монет, сколько лет исполняется Ане. Миша оценил, что в копилке не менее 110, но не более 130 монет. Сколько же лет Ане?

15

6. («Надежда энергетики», 2018, 8.1) В ряд выписаны 100 ненулевых чисел. Каждое число кроме первого и последнего равно произведению двух соседних с ним чисел. Первое число равно 2018. Найдите последнее число в таком ряду.

$\frac{2018}{1} = 001D$

7. («Курчатов», 2017, 9.1) Муравей Боря двигается по координатной плоскости, стартуя из точки $P_0 = (0, 0)$, двигаясь к точке $P_1 = (1, 0)$, и далее по спирали против часовой стрелки (рис.).



Точки с целочисленными координатами, в которые он попадает, образуют последовательность P_n . Найдите координаты точки P_{1557} .

(11,07)

8. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11.1) Дана бесконечная числовая последовательность a_1, a_2, \dots , о которой известно следующее: $a_1 = 20$, $a_{n+1} = a_n a_{n+2}$, $n \in \mathbb{N}$. Найдите все значения, которые может принимать a_{2014} .

07/1 или 0

9. («Ломоносов», 2022, 7–8.4) Для бесконечной последовательности чисел x_1, x_2, x_3, \dots при всех натуральных $n \geq 4$ выполняется соотношение $x_n = x_{n-1} \cdot x_{n-3}$. Известно, что $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$. Найдите x_{2022} .

1

10. («Покори Воробьёвы горы!», 2023, 7–8.5, 9.4) Дана последовательность чисел, члены которой удовлетворяют соотношению:

$$b_n \cdot b_{n-2}^3 = b_{n-3} \cdot b_{n-1}^3$$

при всех $n = 4, 5, 6, \dots$. Найдите b_{2023} , если известно, что $b_1 = 2$, $b_2 = 1$, $b_3 = 2$.

220212

11. («Покори Воробьёвы горы!», 2018, 7–8.6, 9.5) Последовательность a_n задана следующим образом:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{2a_n}{n} \quad (\text{при } n \geq 1).$$

Найдите a_{100} .

5050

12. (ОММО, 2014.1) В бесконечной числовой последовательности $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ не все члены равны между собой. Для всех $n \geq 2$ выполняется равенство

$$x_n = \frac{x_{n-1} + x_n + x_{n+1}}{3}.$$

Найдите отношение $\frac{x_{2012} - x_{1006}}{x_{1006} - x_{503}}$.

7

13. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 9.6) Последовательность чисел задана следующим образом: $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ и $a_{n+1} = 4(a_n - a_{n-1})$ при $n \geq 2$. Найдите наименьший положительный член последовательности, кратный 2014. В ответе укажите номер этого члена.

8001