

МГУ. Показательные неравенства

Показательное неравенство — редкий гость на ДВИ, но если уж попадет, то вполне может оказаться сопоставимым по сложности с прежним вступительным экзаменом на мехмат или с олимпиадой типа «Ломоносова» или «Физтеха». Поэтому решаем и готовимся!

Теория — в статье «[Показательные уравнения и неравенства](#)».

1. (МГУ, ф-т психологии, 2005) Решите неравенство

$$\frac{4^x + 5}{2^x - 11} \geq -1.$$

$$(\infty + ; 11 ; \infty) \cap [1 ; \infty -)$$

2. (МГУ, геологич. ф-т, 2002)

$$3^{2-x} + 6 \cdot (\sqrt{3})^{2-2x} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2+x-2}-3}.$$

$$(\infty + ; 2) \cap [2 - ; \infty -)$$

3. (МГУ, физический ф-т, 2002)

$$15 \cdot \frac{4^{x-2}}{4^x - 3^x} > 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^x.$$

$$\left(\frac{1}{1} ; \frac{1}{3} ; \infty ; 0\right)$$

4. («Ломоносов», 2005.2) Решите неравенство

$$\frac{1}{5^{-x} - 1} \geq \frac{2 - 3 \cdot 5^{1-x}}{5^x - 1}.$$

$$[3 ; \infty ; 0)$$

5. (МГУ, физический ф-т, 1998)

$$9^x - 2^{\frac{2x+1}{2}} < 2^{\frac{2x+7}{2}} - 3^{2x-1}.$$

$$\left(\frac{7}{2} ; \infty -\right)$$

6. (МГУ, ДВИ, 243.3) Решите неравенство

$$\frac{4^{x^2} - 16^{4x-8}}{\sqrt{x^2 + 4x} + \sqrt{12 + 4x - x^2}} > 0.$$

$$[9; 7) \cap (7; 0] \ni x$$

7. (МГУ, ДВИ, 2012.3) Решите неравенство

$$(9^x - 3^{x+2} + 14) \cdot \sqrt{4 - 2^x} \leq 0.$$

$$\{7\} \cap [2; 8) \cup (8; 0]$$

8. (МГУ, экономический ф-т, 1999)

$$4 \cdot \sqrt{\frac{2^x - 1}{2^x}} + \sqrt{14} \leq 14 \cdot \sqrt{\frac{2^{x-2}}{2^x - 1}}.$$

$$[8; 0]$$

9. (МГУ, ДВИ, 2013.3) Решите неравенство

$$9(1 + 5^{1-2x})^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(5^{2x} + 5)^{\frac{1}{2}} \geq 6^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{x}{2}}.$$

$$[1 \geq x \geq 0]$$

10. (МГУ, ДВИ, 203.4) Решите неравенство:

$$3^x - 2^{x+1} \leq \sqrt{2 \cdot 9^x - 10 \cdot 6^x + 2^{2x+3}}.$$

$$(\infty + (9 \wedge 8) \cup [0; \infty -) \ni x$$

11. («Ломоносов», 2008.6) Решите неравенство

$$\sqrt{9^x - 5 \cdot 2^{-x}} < 2^{3-\frac{x}{2}} - 2 \cdot 3^x.$$

$$(6; 8) \cup [8; 0]$$

12. (МГУ, мех.мат, 2000-07.1)

$$2\sqrt{5 \cdot 6^x - 2 \cdot 9^x - 3 \cdot 4^x} + 3^x < 2^{x+1}.$$

$$\left[\left(\frac{3}{4}; \frac{3}{4} \right) \cap \left(\frac{3}{4}; \frac{3}{4} \right) \right]$$

13. (МГУ, ДВИ, 206.4) Решите неравенство

$$2^{\frac{3+5x}{1+2x}} + 2^{\frac{1+3x}{1+2x}} \leq 6\sqrt{2}.$$

$$\left[\frac{1}{8} - x \right]$$

14. («Физтех», 2016) Решите неравенство

$$5^{\frac{x+5}{x+4}} \cdot 3^{x+4} \geq 75.$$

$$\left(\infty + ; \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right] \cap \left[\frac{1}{3} - ; \frac{1}{5} - \right)$$

15. (МГУ, химический ф-т, 1997)

$$\left(\sqrt{2} + 1 \right)^x + 1 < 2 \left(\sqrt{2} - 1 \right)^x.$$

$$\left(0; \infty - \right)$$

16. («Ломоносов», 2010.1) Решите неравенство

$$\left(2 - \sqrt{3} \right)^{(\log_3 4)^{2-x^2}} \leq \left(2 + \sqrt{3} \right)^{-(\log_4 3)^{2-3x}}.$$

$$\left[1; \frac{1}{4} - \right]$$

Метод рационализации

Теория — в статье [«Метод рационализации»](#).

17. (МГУ, физический ф-т, 1993)

$$\frac{2x-1}{2^x-1} < 0.$$

$$\left(\frac{1}{2}; 0 \right)$$

18. (МГУ, геологический ф-т, 1995)

$$\frac{3^x - 2}{x^2 - 6x + 5} \leq 0.$$

$$\boxed{(\frac{5}{3}; 1) \cap [2; 5) \cup [5; \infty)}$$

19. (МГУ, мехмат, 1999-07.1)

$$3^{(x+3)^2} + \frac{1}{9} \leq 3^{x^2-2} + 27^{2x+3}.$$

$$\boxed{\{0\} \cap [\frac{9}{11}; \infty) \ni x}$$

20. (МГУ, мехмат, 2001-05.1) Решить неравенство

$$26^x + 27 \geq 9 \left(6 - \sqrt{10}\right)^x + 3 \left(6 + \sqrt{10}\right)^x.$$

$$\boxed{\left(\infty; \frac{9}{11} \wedge -9\right] \cap \left[6 \frac{9}{11} \wedge +9; \infty\right)}$$