

МГУ. Высоты и ортоцентр

1. (МГУ, ДВИ, 242.5) Вокруг остроугольного треугольника ABC описана окружность. На дуге CA (не содержащей точку B) этой окружности отмечена некоторая точка P . Прямая, проходящая через точки B и H , где H — точка пересечения высот треугольника ABC , пересекает отрезок AP в точке Q . Найдите отношение AC к BC , если известно, что точки C, P, Q, H лежат на одной окружности.

2. В треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1 . Покажите, что треугольники AB_1C_1 и ABC подобны с коэффициентом $k = |\cos A|$.

3. («Шаг в будущее», 2022, 9.2) В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AK и CL . Известно, что $LK = 12$ и $\angle ABC = 60^\circ$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

ξ^8

4. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 9.6) Окружность с диаметром AB пересекает отрезки AC и BC в точках M и N соответственно, причём длина отрезка MN равна радиусу окружности. Найдите площадь четырёхугольника $ABNM$, если известно, что $AC = 12$ и $BC = 8$.

ξ^81

5. (МГУ, ДВИ, 231.5) В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AF, BD и CE . Найдите все возможные значения разности углов $\angle A$ и $\angle B$ треугольника, если известно, что $DE : EF = BC : AC$.

6. (МГУ, ДВИ, 235.5) В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BD и CE . На DE как на диаметре построена окружность. Эта окружность пересекает отрезки AE и AD в точках F и G соответственно. Найдите длину отрезка FG , если известно, что $BC = 25, BD = 20$ и $BE = 7$.

6