

## МГУ. Описанная сфера

1. Найдите радиус сферы, описанной около правильного тетраэдра с ребром 1.

 $\frac{\sqrt{6}}{12}$ 

2. Рёбра тетраэдра равны 1, 3, 3, 4, 4, 5. Найдите радиус его описанной сферы.

 $\frac{7}{6}$ 

3. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 6, 8, 10. Все боковые рёбра равны  $5\sqrt{2}$ . Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

 $\frac{13}{4}$ 

4. Основанием пирамиды служит правильный треугольник со стороной 3. Одно из боковых рёбер перпендикулярно плоскости основания и равно 2. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

 $\frac{7}{2}$ 

5. (МГУ, ДВИ, 2018.7) Дан прямоугольный параллелепипед  $ABCD A' B' C' D'$  с боковыми рёбрами  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$ . На рёбрах  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$  нижнего основания отмечены соответственно точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$ , таким образом, что  $AK : KB = 4 : 5$ ,  $BL : LC = 3 : 1$ ,  $CM : MD = 7 : 2$ ,  $DN : NA = 3 : 1$ . Пусть  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  — центры сфер, описанных около тетраэдров  $AKNA'$ ,  $BLKB'$ ,  $CMLC'$ , соответственно. Найдите  $PQ$ , если известно, что  $QR = 1$  и  $AB : BC = 3 : 2$ .

 $\frac{2}{3}$ 

6. (МГУ, ДВИ, 204.6) Дана правильная треугольная пирамида. Известно, что центр сферы, описанной около этой пирамиды, равноудалён от боковых рёбер и от плоскости основания пирамиды. Найдите радиус сферы, вписанной в эту пирамиду, если длина ребра её основания равна 12.

 $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ 

7. (МГУ, ДВИ, 216.7) Дан параллелепипед  $ABCD A' B' C' D'$  с основаниями  $ABCD$ ,  $A' B' C' D'$  и боковыми рёбрами  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$ . Все рёбра параллелепипеда равны. Плоские углы при вершине  $B$  также равны. Известно, что центр сферы, описанной около тетраэдра  $AB' C' D'$ , лежит в плоскости  $AB' C$ . Радиус этой сферы равен 2. Найдите длину ребра параллелепипеда.

 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. (МГУ, ДВИ, 214.7) Дан тетраэдр  $ABCD$ . Известно, что центр сферы, описанной около этого тетраэдра, лежит на  $AB$ , что плоскости  $ABC$  и  $ABD$  перпендикулярны и что  $AD = DC = CB$ . Найдите угол между прямыми  $AD$  и  $CB$ .

09

9. («Покори Воробьёвы горы!», 2011.3) В сферу радиуса  $\sqrt{3}$  вписан параллелепипед, объём которого равен 8. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

24

10. (МФТИ, 2002.6) Расстояние от центра  $O$  шара радиуса 12, описанного около правильной четырёхугольной пирамиды, до бокового ребра равно  $4\sqrt{2}$ . Найти:

1. высоту пирамиды;
2. расстояние от точки  $O$  до боковой грани пирамиды;
3. радиус вписанного в пирамиду шара.

$(1 - \sqrt{2}) \frac{8}{3} (3 - \sqrt{2}) \frac{8}{9} (1 - \sqrt{2})$

11. («Физтех», 2012.6) На ребре  $BB_1$  правильной треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  выбрана точка  $Q$  так, что центр сферы, описанной около пирамиды  $QAA_1C_1C$ , лежит в грани  $AA_1C_1C$ . Известно, что радиус сферы, описанной около пирамиды  $QABC$ , равен 2, а ребро основания призмы равно  $\sqrt{3}$ . Найдите:

- а) отношение объёма пирамиды  $QAA_1C_1C$  к объёму призмы;
- б) длину отрезка  $QB$ ;
- в) объём призмы.

$\frac{91}{18} (2 - \sqrt{3}) (3 - \sqrt{3}) \frac{91}{18}$

12. (МФТИ, 2008.6) Грани  $ABC$  и  $ABD$  пирамиды  $ABCD$  ортогональны и являются равными равнобедренными треугольниками с общим основанием  $AB$ . Известно, что  $AB = 3$ ,  $CD = 2$ . Найти угол между прямыми  $AC$  и  $BD$ , расстояние между прямыми  $AC$  и  $BD$  и радиус сферы, описанной вокруг пирамиды  $ABCD$ .

$\frac{8}{9\sqrt{17}} (3 - \frac{8\sqrt{17}}{9}) (2 - \frac{17}{6} \arccos \frac{1}{3})$

13. (МФТИ, 1999.6) Ребро правильного тетраэдра  $ABCD$  равно  $a$ , точка  $K$  — середина ребра  $AB$ , точка  $E$  лежит на ребре  $CD$  и  $EC : ED = 1 : 2$ , точка  $F$  — центр грани  $ABC$ . Найти угол между прямыми  $BC$  и  $KE$ , расстояние между этими прямыми и радиус сферы, проходящей через точки  $A$ ,  $B$ ,  $E$  и  $F$ .

$\frac{9}{11} \sqrt{11} \frac{6}{9\sqrt{11}} \frac{6\sqrt{11}}{11} \arccos \frac{1}{3}$

14. (МГУ, мехмат, 1999-03.6) Основание  $H$  высоты  $SH$  треугольной пирамиды  $SABC$  принадлежит грани  $ABC$ ,  $SH = \sqrt{\frac{5}{21}}$ ,  $SA = 1$ ,  $SB = 2$ ,  $\angle ASB = 120^\circ$ ,  $\angle ACB = 60^\circ$ . Найти радиус сферы, описанной около пирамиды  $SABC$ .

$$\frac{7}{12\sqrt{3}}$$

15. (МГУ, мехмат, 2003-05.5) Пирамида  $SABCD$  с боковыми ребрами  $AS = BS = CS = 2$  вписана в сферу радиуса  $\frac{5}{3}$ . Линия пересечения плоскостей  $ASD$  и  $BSC$  касается сферы. Найти объем пирамиды, если  $AB = BC = \frac{8}{5}$ .

$$\frac{921}{8\sqrt{96}}$$

16. («Ломоносов», 2006.8) В треугольной пирамиде  $SABC$  ребро  $SA$  перпендикулярно плоскости  $ABC$ ,  $\angle SCB = 90^\circ$ ,  $BC = \sqrt{5}$ ,  $AC = \sqrt{7}$ . Последовательность точек  $O_n$  строится следующим образом: точка  $O_1$  — центр сферы, описанной около пирамиды  $SABC$ , и для каждого натурального  $n \geq 2$  точка  $O_n$  есть центр сферы, описанной около пирамиды  $O_{n-1}ABC$ . Какую длину должно иметь ребро  $SA$ , чтобы множество  $\{O_n\}$  состояло ровно из двух различных точек?

$$2$$