

## МГУ. Логарифмические уравнения

На ДВИ МГУ безраздельно доминируют [логарифмические неравенства](#), в то время как логарифмические уравнения встретились всего пару раз. Но тема логарифмических уравнений — важная и популярная, поэтому готовиться к ней нужно обязательно.

Теория — в статье «[Логарифмические уравнения и неравенства](#)».

1. (МГУ, ДВИ, 2011.3) Решите уравнение

$$\log_2(3x - 4) = \log_4(2 - x).$$

6 11
---------

2. (МГУ, ДВИ, 2015.4) Решите уравнение

$$\log_x |2x^2 - 3| = 4 \log_{|2x^2 - 3|} x.$$

$\frac{2}{\sqrt{41} + \sqrt{17}}, \frac{2}{1}, \frac{2}{1} = x$
---

3. (МГУ, биологический ф-т, 2003) Решите уравнение

$$\sqrt{\log_x \sqrt{2x}} \cdot \log_4 x = -1.$$

$\frac{2}{\sqrt{3} - 1}, \frac{2}{1}$
---------------------------------------

4. («Покори Воробьёвы горы!», 2016.1) Решите уравнение

$$\sqrt{\log_x \sqrt{2x}} \cdot \log_2 x = -1.$$

11 1
---------

5. («Покори Воробьёвы горы!», 2016.1) Решите уравнение

$$(1 - \log_2 x) \cdot \sqrt{\log_{\frac{x}{2}} \sqrt{x}} = 1.$$

2 1
--------

6. («Покори Воробьёвы горы!», 2013.2) Решите уравнение

$$\left| \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 2 \right| - \left| \log_2 x + 2 \right| = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} x.$$

$\{1\} \cap [\frac{2}{3}; 0)$

7. (МГУ, мехмат, 2006.1) Игорь и Володя решали задачу: некоторое заданное трёхзначное число прологарифмировать по основанию 2, из полученного числа вычесть некоторое заданное натуральное число, а затем разность разделить на то же самое натуральное число. Игорь перепутал и в первом действии прологарифмировал по основанию 3, а Володя посчитал правильно. Когда они сверили свои результаты, оказалось, что полученные ими числа взаимно обратны. Найти исходное трёхзначное число.

912

8. (МГУ, мехмат, 2007.1) Учитель назвал Пете натуральное число и попросил найти сумму его логарифмов по основаниям 3 и 75. Однако Петя, по ошибке, не сложил эти логарифмы, а перемножил их, получив неверный ответ, который оказался вдвое меньше верного. Какое число назвал ему учитель?

15

9. (МГУ, мехмат, 2000-07.2) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2 xy \cdot \log_{4x} y = 2, \\ 8x - y = 1. \end{cases}$$

$(\frac{8}{3}; \frac{8}{3})$

10. (МГУ, ИСАА, 2004) Решите уравнение

$$(\log_3 (3^{-2x} + 1) + x) \cdot (2 \log_9 (3^{2x} + 1) - x - 2) = 3.$$

$\log_3 \frac{27 \pm 5 \sqrt{29}}{2}$

11. («Физтех», 2014.1) Решите уравнение

$$\log_{2^{x+1}+1} (3x^2 + 4x - 3) = \log_{10-2^{2-x}} (3x^2 + 4x - 3).$$

$2, \frac{3}{2}$

12. («Физтех», 2013) Решите уравнение

$$\log_{5^x} (x^2 + 9x + 15) + \log_{125^x} x^3 = \frac{2}{x}.$$

1

13. («Физтех», 2013) Решите уравнение

$$\log_{4^{x+4}} x^4 + \log_{2^{x+4}} (x+5)^2 = \frac{4}{x+4}.$$

1

14. («Покори Воробьёвы горы!», 2019, 10–11.2) Решите уравнение

$$\log_{2/9} 2 = (\log_x 2) \cdot (\log_{4x} 2) \cdot (\log_{9x} 2).$$

2

15. («Физтех», 2015, 11.1) Решите уравнение

$$\left(\frac{x}{400}\right)^{\log_5 \frac{x}{8}} = \frac{1024}{x^3}.$$

9

16. («Физтех», 2015, 11.2) Решите уравнение

$$x^{\log_3(27x^2)} = \frac{x^9}{81}.$$

6

17. («Физтех», 2014.3) Решите уравнение

$$\log_{7x-6} (7x^2 + x - 6) \cdot \log_{x+1} (x^3 + 1) = \log_{7x-6} (7x^2 + x - 6) + \log_{x+1} (x^3 + 1).$$

2

18. («Физтех», 2007) Решите уравнение

$$2 \log_5(x^2 - 4) + 4\sqrt{\log_5(x - 2)^2} - \log_5(x + 2)^2 = 5.$$

9^z + z

19. («Физтех», 2010) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{2y-1} \sqrt{x+2} = \log_{2y+1} x, \\ \log_x \frac{x^3}{2y+1} = \log_{2y-1}(x+2). \end{cases}$$

$\left(\frac{p}{2l^{\lambda+\varepsilon}}, \frac{z}{2l^{\lambda+\varepsilon}}\right), \left(\frac{p}{2l^{\lambda+2}}, \frac{z}{2l^{\lambda+1}}\right)$

20. («Физтех», 2018, 11.1) Найдите все значения  $x$ , при каждом из которых одно из трёх данных чисел

$$\log_{x^2}(x^2 - 10x + 21), \quad \log_{x^2} \frac{x^2}{x-7} \quad \text{и} \quad \log_{x^2} \frac{x^2}{x-3}$$

равно сумме двух остальных.

8 = x

21. («Физтех», 2018, 11) Найдите все значения  $x$ , при каждом из которых одно из трёх данных чисел

$$\log_x \left(x - \frac{13}{6}\right), \quad \log_{x-\frac{13}{6}}(x-3) \quad \text{и} \quad \log_{x-3} x$$

равно произведению двух остальных.

$\frac{z}{\varepsilon l^{\lambda+\varepsilon}} = x, \frac{\varepsilon}{l^{\lambda}} = x$

22. («Покори Воробьёвы горы!», 2013.4) Решите уравнение

$$\log_3(x+1) \cdot \log_3(2x-1) \cdot (3 - \log_3(2x^2 + x - 1)) = 1.$$

z

23. («Физтех», 2009) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{2y+3}(4y^2 - x^2 + 16y + 6x + 8) = 2, \\ \log_{x-4}(x^2 - 6x - y + 13) = 2. \end{cases}$$

(8z, 8z)

24. («Физтех», 2020, 11) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

$$\left(\frac{z}{1-\sqrt{z}}; \frac{z}{\sqrt{z}-6}\right) ; (8; 6) ; (z; z)$$

25. («Ломоносов», 2018, 10–11.6) Найдите все такие наборы чисел  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ , что  $x_1 = x_{n+1}$  и при всех  $k = 1, \dots, n$  выполнено равенство

$$2 \log_2 x_k \cdot \log_2 x_{k+1} - \log_2^2 x_k = 9.$$

$$\frac{8}{1} = 1+9x = \dots = 2x = 1x \text{ или } 8 = 1+9x = \dots = 2x = 1x$$