МГУ. Комбинации фигур

1. (*МГУ, ДВИ, 242.7*) В основании пирамиды лежит трапеция $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AD = 2BC$. Сфера радиуса 1 касается плоскости основания пирамиды и плоскостей её боковых граней ADS и BCS. Найдите отношение, в котором делит объём пирамиды плоскость ADT, где T — точка касания сферы с плоскостью BCS, если грань ADS перпендикулярна плоскости основания, а высота пирамиды равна 4.

$\boxed{39 : 36}$

2. (*МГУ, ДВИ, 243.7*) В основании прямой призмы лежит ромб со стороной 3. Найдите объём призмы, если известно, что существует сфера радиуса 1, касающаяся плоскости нижнего основания, двух противоположных боковых рёбер и всех рёбер верхнего основания.

$\boxed{\frac{16\sqrt{2}}{3}}$

3. (*МГУ, ДВИ, 2011.7*) В закрытой коробке, имеющей форму куба со стороной 5, лежат два шара. Радиус первого из них равен 2. Этот шар касается плоскости основания и двух соседних боковых граней куба. Второй шар касается двух других боковых граней куба, плоскости основания и первого шара. Чему равен радиус второго шара?

$\boxed{1}$

4. (*МГУ, ДВИ, 2012.8*) В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник ABC со сторонами $AC = BC = 5$ и $AB = 6$, боковые ребра AS, BS, CS пирамиды равны соответственно 7, 7 и 4. Прямой круговой цилиндр расположен так, что окружность его верхнего основания имеет ровно одну общую точку с каждой из боковых граней пирамиды, а окружность нижнего основания лежит в плоскости ABC и касается прямых AC и BC. Найдите высоту цилиндра.

$\boxed{\frac{5\sqrt{15}}{6}}$

5. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016.4*) Двугранный угол при основании правильной треугольной пирамиды $SABC$ равен $\operatorname{arctg} 3$. В каком отношении делит боковую сторону SB сфера, центр которой лежит в плоскости основания, если известно, что вершины основания принадлежат сфере?

$\boxed{5 : 8}$

6. (*МФТИ, 1997.5*) Внутри цилиндра лежат два шара радиуса r и один шар радиуса $2r$ так, что каждый шар касается двух других, верхнего основания цилиндра и его боковой поверхности. Найти радиус основания цилиндра.

$\boxed{\frac{17+7\sqrt{7}}{12}r}$

7. (*МГУ, мехмат, 2003-03.5*) Точка O расположена в сечении $AA'C'C$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ с размером $2\times 6\times 9$ так, что $\angle OAB+\angle OAD+\angle OAA' = 180^\circ$. Сфера с центром в точке O касается плоскостей $A'B'C'$, $AA'B$ и не имеет общих точек с плоскостью $AA'D$. Найти расстояние от точки O до этой плоскости.

$\boxed{3}$

8. (*МГУ, мехмат, 2002-05.5*) Сфера высекает на ребрах AB, CB, AS и CS треугольной пирамиды $SABC$ равные отрезки KL, NM, K_1L_1 и N_1M_1 соответственно (точки K и K_1 лежат ближе к A, чем L и L_1, а точки N и N_1 лежат ближе к C, чем M и M_1). Известно, что $MM_1 = 2KK_1$ и $2KN = 3L_1M_1$, $\angle SBA = \angle SBC$ и $\angle KK_1N_1 = 90^\circ$. Найти отношение объемов пирамид $SABC$ и M_1KLMN.

$\boxed{32 : 5}$

9. (*МГУ, мехмат, 2001-05.5*) Основанием треугольной пирамиды $SABC$ служит треугольник со сторонами $AB = BC = 15$ и $AC = 18$. Двугранные углы при ребрах AB и BC равны по $\operatorname{arctg}\frac{1}{7}$, а при ребре AC — $\frac{\pi}{4}$. Сфера, центр которой лежит в плоскости ABC, касается боковых граней в точках K, L и M. Найти радиус сферы, описанной около пирамиды $SKLM$.

$\boxed{\frac{6}{266}\sqrt{221}}$

10. (*МГУ, мехмат, 2007.6*) Два конуса имеют общую вершину и единственную общую образующую, которая составляет с их осями углы в 30° и 45°. Двугранный угол расположен так, что каждая его грань касается каждого из конусов по разным образующим. Найти величину этого угла.

$\boxed{2\arccos\left(\sqrt{3}-1\right)^{3/2}}$

11. (*«Физтех», 2013.7*) В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $BC = 4$. Сфера ω касается плоскости основания пирамиды и касается всех трёх её боковых рёбер в их серединах. Пусть Ω — сфера, описанная около пирамиды $SABC$.

а) Найдите расстояние между центрами сфер ω и Ω.

б) Найдите отношение радиусов сфер ω и Ω.

в) Пусть дополнительно известно, что угол между гранями SAB и ABC равен $\operatorname{arctg} 2$. Найдите объём пирамиды $SABC$.

$\boxed{\text{а) } 0;\ \text{б) } 1 : 2;\ \text{в) } 4}$

12. (*«Физтех», 2019.7*) На рёбрах AC, BC, BS, AS правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S выбраны точки K, L, M, N соответственно. Известно, что точки K, L, M, N лежат в одной плоскости, причём $KL = MN = 4$, $KN = LM = 9$. В четырёхугольнике $KLMN$ расположены две окружности Ω_1 и Ω_2, причём окружность Ω_1 касается сторон KN, KL и LM, а окружность Ω_2 касается сторон KN, LM и MN. Прямые круговые конусы $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ с основаниями Ω_1 и Ω_2 соответственно расположены внутри данной пирамиды, причём вершина P конуса $\mathcal{F}_1$ лежит на ребре AB, а вершина Q конуса $\mathcal{F}_2$ лежит на ребре CS.

а) Найдите $\angle SAB$.

б) Найдите длину отрезка CQ.

а) $\angle SAB = \arccos \frac{1}{3}$; б) $CQ = \frac{25}{3}$

13. (*«Физтех», 2011.6*) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания ABC равна 2, боковое ребро равно 3. Сфера с центром O на прямой SB касается рёбер SA, SC и AC. Найдите расстояния от центра сферы до плоскостей ASC и ABC, а также радиус сферы.

$\frac{3}{7}\sqrt{\frac{23}{2}}$; $\frac{1}{7}\sqrt{\frac{23}{3}}$; $\frac{8\sqrt{2}}{7}$

14. (*МФТИ, 2001.6*) Сторона основания ABC правильной пирамиды $ABCD$ равна $4\sqrt{3}$, угол DAB равен $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{37}{3}}$. Точки A_1, B_1, C_1 — середины ребер AD, BD, CD соответственно. Найти:

1. угол между прямыми BA_1 и AC_1;
2. расстояние между прямыми BA_1 и AC_1;
3. радиус сферы, касающейся плоскости ABC и отрезков AC_1, BA_1 и CB_1.

1) $\arccos \frac{11}{32}$; 2) $\frac{36}{\sqrt{301}}$; 3) 2

15. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013.5*) Два равных конуса расположены так, что осью каждого из них является образующая другого. Углы при вершинах в осевых сечениях этих конусов равны по 90°. Найдите угол между двумя образующими, по которым пересекаются эти конусы.

$2 \arccos \sqrt{6 - 3\sqrt{3}}$

16. (*ОММО, 2015.10*) В конус вписан цилиндр объёма 21. Плоскость верхнего основания этого цилиндра отсекает от исходного конуса усеченный конус объёмом 91. Найдите объём исходного конуса.

94,5

17. (*«Физтех», 2013.7*) Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ вписана в цилиндр (основания призмы вписаны в окружности оснований цилиндра). Плоскость α имеет ровно одну общую точку с каждым из оснований цилиндра и пересекает рёбра AA_1, BB_1 и CC_1 в точках K, N, P соответственно. Найдите отношения $CP : PC_1$ и $BN : NB_1$, если $AK : KA_1 = 1 : 12$.

$\boxed{CP : PC_1 = 25 : 27,\ BN : NB_1 = 49 : 3 \text{ или } CP : PC_1 = 49 : 3,\ BN : NB_1 = 25 : 27}$

18. (*«Ломоносов», 2014.7*) В правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ вписан шар радиуса $\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности вписанного в шар прямого кругового цилиндра, основание которого лежит в плоскости, проходящей через точку A и середины рёбер BB_1 и CC_1.

$\boxed{\frac{12\pi}{5}}$

19. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2014.5*) На основании прямого кругового конуса расположны три попарно касающихся друг друга шара одинакового радиуса. Каждый из них касается также боковой поверхности конуса. Четвёртый шар того же радиуса касается первых трёх и боковой поверхности конуса. Найдите объём конуса, если радиус окружности, образованной точками касания четвёртым шаром боковой поверхности конуса, равен $\sqrt{2}$.

$\boxed{\frac{\pi}{6}\left(3+\sqrt{3}+2\sqrt{2}\right)^3}$

20. (*«Физтех», 2008.4*) В основании пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Сфера ω радиуса $\frac{77}{20}$ с центром O касается рёбер AS, BS, AD, BC пирамиды $SABCD$ соответственно в точках K, L, M, N, пересекает ребро AB в точках P и Q и касается грани CDS. Известно, что прямая SO перпендикулярна плоскости $ABCD$ и пересекает её в точке H, $\frac{PQ}{AB} = \sqrt{\frac{23}{72}}$, $\frac{AK}{BS} = \frac{1}{3}$. Найдите углы SAB и BSH, высоту пирамиды и её объём.

$\boxed{\arccos\frac{2\sqrt{2}}{37};\ \arcsin\frac{11}{21};\ 8;\ \frac{576\sqrt{2}}{5}}$