

МГУ. Экстремальные задачи

Содержание

1	Неравенства и оценки	1
2	Неравенство Коши	2
3	Минимаксные задачи	4
4	Формула расстояния между точками	9

Задачи на наибольшие и наименьшие значения (которые мы для краткости называем *экстремальными*) постоянно предлагаются в МГУ на ДВИ (дополнительном вступительном испытании). Чтобы освоиться с данной темой, стоит поработать со следующими листками:

- Среднее арифметическое и среднее геометрическое
- Квадратичные неравенства
- Неравенства между средними
- Неравенство Коши

Данный файл содержит все экстремальные задачи, которые встречались на ДВИ с момента его возникновения в 2011 году по 2024 год включительно (исключая клоны задач параллельных вариантов 2011–2019 годов). В дополнение к задачам ДВИ приведены также задачи прежних вступительных экзаменов в МГУ и МФТИ (до эпохи ДВИ и ЕГЭ), а также задачи некоторых олимпиад.

1 Неравенства и оценки

1. (МГУ, ДВИ, 237.6) Действительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению

$$abc = (a - 1)(b - 1)(c - 1).$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения $a^2 + b^2 + c^2$.

1

2. (МГУ, ДВИ, 236.6) Положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению

$$a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab} = 1.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения $a + b + c$.

ε^

3. (МГУ, ДВИ, 235.6) Найдите все значения параметра k , при которых неравенство

$$a^3 + b^3 + c^3 + 6 \geq k(a + b + c)$$

справедливо для всех действительных a, b, c , таких что $a \geq -2, b \geq -2, c \geq -2$.

ε = γ

4. (МГУ, ДВИ, 231.6) Положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 1.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения

$$\frac{a}{2+a^2} + \frac{b}{2+b^2} + \frac{c}{2+c^2}.$$

1

5. («Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11.3) Координаты точки удовлетворяют соотношению $xy + yz + zx = 4$. На каком расстоянии от плоскости $z = -3$ может лежать эта точка, если известно, что расстояние от этой точки до начала координат равно двум?

$\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + 6}$

2 Неравенство Коши

6. (МГУ, ДВИ, 2011.6) Найдите наибольшее из значений функции

$$\frac{9^x}{4^x - 6^x + 9^x}$$

и точку x , в которой это значение достигается.

$\frac{1 - \varepsilon^{\frac{2801}{1}}}{1} = x, \frac{\varepsilon}{\varepsilon}$

7. (МГУ, ДВИ, 2015.8) Найдите все пары (α, β) , при которых достигается минимум выражения

$$\frac{4 - 3 \sin \alpha}{2 + \cos 2\alpha} + \frac{2 + \cos 2\alpha}{\beta^2 + \beta + 1} + \frac{\beta^2 + \beta + 1}{\sqrt{\beta} + 1} + \frac{\sqrt{\beta} + 1}{4 - 3 \sin \alpha}.$$

$0 = \beta^2 + \beta + 1, \beta \in \mathbb{Z}, \frac{\varepsilon}{\beta} = \nu$

8. (МГУ, ДВИ, 2018.8) Найдите все пары чисел x, y из промежутка $(0, \frac{\pi}{2})$, при которых достигается минимум выражения

$$\left(\frac{\sqrt{3} \sin y}{\sqrt{2} \sin(x+y)} + 1 \right) \left(\frac{\sqrt{2} \sin x}{3 \sin y} + 1 \right)^2 \left(\frac{\sin(x+y)}{7\sqrt{3} \sin x} + 1 \right)^4.$$

$$\frac{\xi^{\wedge}}{\Gamma} \text{ сооэге} = \eta, \frac{\xi^{\wedge}}{\xi^{\wedge}} \text{ сооэге} = x$$

9. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2017, 10.2) Найдите все такие пары действительных чисел x и y , для которых

$$25^{x^4-y^2} + 25^{y^4-x^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$\left(\frac{\xi^{\wedge}}{\Gamma} ; \frac{\xi^{\wedge}}{\Gamma} \right) ; \left(\frac{\xi^{\wedge}}{\Gamma} - ; \frac{\xi^{\wedge}}{\Gamma} \right) ; \left(\frac{\xi^{\wedge}}{\Gamma} ; \frac{\xi^{\wedge}}{\Gamma} - \right) ; \left(\frac{\xi^{\wedge}}{\Gamma} - ; \frac{\xi^{\wedge}}{\Gamma} - \right)$$

10. (МГУ, ДВИ, 246.6) Многочлен $f(x) = x^4 - 12x^3 + ax^2 + bx + 81$ с действительными a и b допускает разложение

$$f(x) = (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3)(x - c_4)$$

с некоторыми *положительными*¹ c_1, c_2, c_3, c_4 . Найдите все возможные значения $f(5)$.

91

11. (МГУ, ДВИ, 238.6) Действительные числа a, b, c удовлетворяют неравенствам $0 < a < 1$, $0 < b < 1$, $0 < c < 1$. Найдите наибольшее возможное значение выражения

$$\sqrt[4]{a(1-b)} + \sqrt[4]{b(1-c)} + \sqrt[4]{c(1-a)}.$$

$$\frac{\tau}{\xi^{\wedge} \xi}$$

12. (МГУ, ДВИ, 233.6) Положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения $ab + bc\sqrt{3}$.

I

¹Курсив мой. В оригинале — «с некоторыми действительными c_1, c_2, c_3, c_4 ». Однако автор задачи, опираясь в своем решении на неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, упустил из виду, что это неравенство имеет место лишь для неотрицательных чисел, тогда как оригинальное условие допускает также случай $c_1, c_2 > 0$ и $c_3, c_4 < 0$. В этом дополнительном случае можно построить бесконечное множество примеров с различными значениями $f(5)$; вот один из них:

$$f(x) = (x-1)(x-27) \left(x+8+\sqrt{61} \right) \left(x+8-\sqrt{61} \right), \quad f(5) = -9504.$$

13. (МГУ, ДВИ, 234.6) Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\frac{c-b}{a+2b+c} + \frac{2b}{a+b+2c} - \frac{4c}{a+b+3c}$$

при положительных a, b, c .

6 - 9

14. (МГУ, ДВИ, 241.6) Числа a, b, c положительны и удовлетворяют соотношению $a+b+c=1$. Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\frac{1+a}{1-a} \cdot \frac{1+b}{1-b} \cdot \frac{1+c}{1-c}$$

8

15. (МГУ, ДВИ, 245.6) Числа a, b, c, d положительны и удовлетворяют соотношению

$$a+b+c+d=1.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\frac{a^2}{1-a} + \frac{b^2}{1-b} + \frac{c^2}{1-c} + \frac{d^2}{1-d}$$

8/1

3 Минимаксные задачи

Здесь стоит дополнительно посмотреть теорию следующих листков:

- [Минимаксные задачи в алгебре](#)
- [Минимаксные задачи в тригонометрии](#)
- [Минимаксные задачи и логарифмы](#)

16. (МГУ, ФНМ, 2002) Решить уравнение

$$\sqrt{x^2 - 3xy + y^2 + 1} + |2x^2 + 5xy - 3y^2| = 0.$$

(7-1-):(7-1)

17. («Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11.5) Решите уравнение

$$|1 - x - y - xy| + |2x^2y^2 - 2x^2y - 2xy^2 + 2xy - 9| + \frac{|xy|}{xy} = -1.$$

$$\left(\frac{x}{1-x-y}\right) \cdot \left(\frac{y}{1-x-y}\right)$$

18. (МГУ, ф-т гос. управления, 2003) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2xy - z^2 = 4. \end{cases}$$

$$(z, z^2)$$

19. (МГУ, химический ф-т, 1998) Решить систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2(x - y) + 2 = 0, \\ z^2 + xz + yz - 4 = 0. \end{cases}$$

$$(z, z^2)$$

20. (ОММО, 2010.8) Найдите все решения системы

$$\begin{cases} xy - t^2 = 9, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 18. \end{cases}$$

$$(0, 0, 3)$$

21. (МГУ, ДВИ, 202.6) Найдите все пары действительных чисел x, y , удовлетворяющих соотношению

$$\frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{1}{xy} = 2\sqrt{2 - \sqrt{xy}} \cdot \sqrt[4]{xy}.$$

$$1 = \sqrt{x} = x$$

22. (МГУ, ДВИ, 202.7) Найдите все пары положительных чисел (x, y) , удовлетворяющих уравнению

$$\log_{2x^2y+1}(x^4 + y^2 + 1) = \log_{y^4+x^2+1}(2xy^2 + 1).$$

$$1 = \sqrt{x}$$

23. (МГУ, ДВИ, 216.6) Найдите все пары действительных чисел (x, y) , удовлетворяющих равенству

$$\frac{\pi}{2} - \arcsin(1 + \log_2(x^2 + y^2)) = 1 + \log_2(xy).$$

$$\frac{\pi}{4} \mp \pi = \pi = x$$

24. (МГУ, ДВИ, 243.6) Найдите все тройки положительных чисел x, y, z , удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} (x^2 + xy + y^2)(y^2 + yz + z^2)(z^2 + zx + x^2) = xyz, \\ (x^4 + x^2y^2 + y^4)(y^4 + y^2z^2 + z^4)(z^4 + z^2x^2 + x^4) = x^3y^3z^3. \end{cases}$$

$$\pi/1 = z = \pi = x$$

25. («Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11) Решите систему

$$\begin{cases} |x| + 6y \geq 1, \\ 37x^2 + 37y^2 \leq 1. \end{cases}$$

$$\left(\frac{2\pi}{9}, \frac{2\pi}{1} \mp\right)$$

26. (МГУ, ДВИ, 2011.8) Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2x^2 + 4xy + 11y^2 \leq 1, \\ 4x + 7y \geq 3. \end{cases}$$

$$\frac{6}{1} = \pi, \frac{6}{2} = x$$

27. (МФТИ, 2001) Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 3x^2 + 2xy + 3 \leq 0, \\ y^2 + 6y + 18x \leq 0. \end{cases}$$

$$\left(\frac{\pi}{2} \wedge \frac{\pi}{2} - 1 -\right) ; \left(\frac{\pi}{2} \wedge \frac{\pi}{2} + 1 -\right)$$

28. (МГУ, ДВИ, 2019.8) Найдите все x, y из интервала $(-\pi, \pi]$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} 10\sqrt{6} \sin x + 5 \sin y + 4\sqrt{3} \sin \frac{x+y}{2} = 6\sqrt{6}, \\ 5 \sin x \sin y + 4\sqrt{3} \sin x \sin \frac{x+y}{2} + \sqrt{2} \sin y \sin \frac{x+y}{2} = \frac{6\sqrt{6}}{5}. \end{cases}$$

$$\left(\frac{x}{1} \text{ сооооо} - y \cdot \frac{x}{1} \text{ цисооо} - y \right) = (h \cdot x) \cdot \left(\frac{x}{1} \text{ сооооо} \cdot \frac{x}{1} \text{ цисооо} \right) = (h \cdot x)$$

29. (МГУ, ДВИ, 203.7) Найдите все значения параметра a из промежутка $[0, 2\pi)$, при которых уравнение

$$\sqrt{\frac{3}{2}x^2 - xy + \frac{3}{2}y^2} = x \cos a + y \sin a$$

имеет хотя бы одно решение (x, y) , отличное от $(0, 0)$.

$$\bar{v}/\mu \text{ } \bar{v}/\mu = v$$

30. («Шаг в будущее», 2020, 10.3) Решите неравенство

$$\frac{4x^4 + 1}{4\sqrt{2}} \leq x \sqrt{x^4 - \frac{1}{4}}$$

$$\frac{x}{x^2+1} \wedge$$

31. (ОММО, 2021.5) Решите уравнение:

$$4(x^4 + 3x^2 + 3)(y^4 - 7y^2 + 14) = 21.$$

$$\left(\frac{x}{2} \wedge \mp : 0 \right)$$

32. («Покори Воробьёвы горы!», 2010.2) Решите уравнение

$$\sqrt{6x - x^2 - 5} + \sqrt{9 - |x - 3|} = 5 + |x - 3|.$$

$$\text{E}$$

33. (МГУ, химический ф-т, 2001.4) Решить уравнение

$$\sqrt{4x - x^2} + \sqrt{4x - x^2 - 3} = 3 + \sqrt{2x - x^2}.$$

$$z = x$$

34. («Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11.1) Решите неравенство

$$\sqrt{x^2 - 4x + 5} + \sqrt{3x^2 - 12x + 13} \leq 4x - x^2 - 2.$$

7 = x

35. («Физтех», 2023, 9.2) Решите неравенство

$$|x^2 + 7x + 12| + |x^2 + 2x - 8| \leq |5x + 20|.$$

$\{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{R}\} \ni x$

36. («Ломоносов», 2012, 9.5) Решите уравнение

$$|1 - x| + |9 - x| + |25 - x| + |49 - x| + |81 - x| = 120.$$

25

37. (МГУ, ф-т психологии, 2002.6) Решить уравнение

$$|x^3 + 7x^2 - 11x - 6| + |x^3 - 12x^2 - 5x + 3| = 18x^2 - 2x - 13.$$

2

38. (МГУ, ДВИ, 238.4) Решите уравнение

$$|\log_3^2 x - \log_{2x}^2 2| = \log_3^2 x + \log_{2x}^2 2 - 2.$$

$\frac{8}{1}, \frac{7}{1} = x$

39. («Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11.4) Найдите координаты общих точек графиков функций

$$f(x) = \left| 5x^2 + 6x - \frac{2}{x} \right| + \left| 3x^2 - 2\sqrt{x} - 9 - \frac{5}{x} \right| \quad \text{и} \quad g(x) = 2x^2 + 2\sqrt{x} + 21 - \frac{3}{x}.$$

(22, 1)

40. («Физтех», 2016, 9.4, 10.4) Изобразите на плоскости (x, y) множество точек, удовлетворяющих уравнению

$$|5x| + |12y| + |60 - 5x - 12y| = 60,$$

и найдите площадь полученной фигуры.

0E

41. (МГУ, ДВИ, 2012.5) Найдите площадь фигуры, состоящей из точек (x, y) координатной плоскости, удовлетворяющих уравнению

$$|x| + |x + 3y| + 3|y - 2| = 6.$$

9

4 Формула расстояния между точками

Пусть на координатной плоскости Oxy даны две точки $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$. Расстояние между этими точками вычисляется по формуле

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Если в алгебраической (по формулировке) задаче фигурирует корень из суммы квадратов, то, возможно, имеется геометрическое решение: интерпретируем этот корень как расстояние между некоторыми точками и используем неравенство треугольника.

42. («Покори Воробьёвы горы!», 2013, 8.8) Найдите наименьшее значение выражения

$$2\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{(x - 2)^2 + 4} + \sqrt{(x - 3)^2 + 16}.$$

9^9

43. («Покори Воробьёвы горы!», 2013, 9.8) Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{(a - 3)^2 + (b - 3)^2} + 2\sqrt{(a - 3)^2 + (b + 1)^2} + 2\sqrt{(a + 1)^2 + (b - 3)^2}.$$

11^11

44. (МФТИ, 2008.5) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 - 16x + 64} + \sqrt{x^2 + y^2 + 12y + 36} = 10, \\ 5x^2 - 8y^2 = 8. \end{cases}$$

4-8

45. (МГУ, географич. ф-т, 1999.5) При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} y^2 - (2a + 1)y + a^2 + a - 2 = 0, \\ \sqrt{(x - a)^2 + y^2} + \sqrt{(x - a)^2 + (y - 3)^2} = 3 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

$$\boxed{[-1; 1) \cup (1; 7-]}$$

46. («Физтех», 2012.6) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - (4a + 2)x + 4a^2 + 4a - 3 = 0, \\ \sqrt{x^2 + (y + 2a)^2} + \sqrt{(x + 4)^2 + (y + 2a)^2} = 4 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

$$\boxed{\left[\frac{2}{17}; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; \frac{2}{2}\right]}$$

47. (МГУ, ВМК, 1996.5) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 14x - 10y + 58 = 0, \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 16x - 12y + 100} + \sqrt{x^2 + y^2 + 4x - 20y + 104} = 2\sqrt{29}. \end{cases}$$

$$\boxed{\left(\frac{217 - 5\sqrt{415}}{29}, \frac{27}{180 + 2\sqrt{415}}\right)}$$

48. (МГУ, ДВИ, 2016.8) Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{106 + \log_a^2 \cos ax + \log_a \cos^{10} ax} + \sqrt{58 + \log_a^2 \sin ax - \log_a \sin^6 ax} + \sqrt{5 + \log_a^2 \operatorname{tg} ax + \log_a \operatorname{tg}^2 ax}$$

и все пары (a, x) , при которых оно достигается.

$$\boxed{\mathbb{Z} \ni y, \pi y + \frac{8}{\pi} = x, z = v \sqrt{6}, v \in \mathbb{Z}}$$

49. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11.3) Найдите минимальное значение выражения

$$\sqrt{(x + 6)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y - 4)^2}$$

при условии $2|x| + 3|y| = 6$.

$$\boxed{2\sqrt{\frac{205}{13}}}$$

50. («Высшая проба», 2013, 10.5) Пусть x , y и z — произвольные вещественные числа. Какое наименьшее значение может принимать выражение

$$\sqrt{2+x^2} + \sqrt{2+(x-y)^2} + \sqrt{2+(y-z)^2} + \sqrt{2+(2-z)^2}?$$

Обоснуйте свой ответ.

9

51. («Высшая проба», 2013, 11.5) Пусть x , y и z — произвольные вещественные числа. Какое наименьшее значение может принимать выражение

$$\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+(x-y)^2} + \sqrt{1+(y-z)^2} + \sqrt{1+(3-z)^2}?$$

Обоснуйте свой ответ.

9