

Уравнения с модулем

Содержание

1	Определение модуля	1
2	Замена переменной	2
3	Перебор промежутков	2
4	Равносильные переходы	5
5	Задачи	6

В данной статье мы изучаем алгебраические уравнения, в которых переменная находится под знаком модуля. Рассматриваемые уравнения не содержат знаков радикала, а также тригонометрических, показательных и логарифмических функций; такие комбинированные задачи будут предметом отдельных статей.

1 Определение модуля

По определению **модуль** числа a есть следующая величина:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0; \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases} \quad (1)$$

Например, $|7| = 7$, $|-3| = 3$, $|0| = 0$. Одного лишь определения модуля уже хватает, чтобы начать решать задачи вступительных экзаменов в МГУ!

ЗАДАЧА 1. (МГУ, физический ф-т, 1983) Решить уравнение

$$|2 - 5x^2| = 3.$$

РЕШЕНИЕ. Если модуль числа равен 3, то само число равно 3 или -3 . Следовательно, наше уравнение равносильно совокупности

$$\begin{cases} 2 - 5x^2 = 3, \\ 2 - 5x^2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -\frac{1}{5}, \\ x^2 = 1. \end{cases}$$

Первое уравнение не имеет решений, второе имеет корни ± 1 .

ОТВЕТ: ± 1 .

ЗАДАЧА 2. (МГУ, геологич. ф-т, 1979) Решить уравнение

$$|2x - 3| = 3 - 2x.$$

РЕШЕНИЕ. Если модуль числа равен этому числу со знаком минус, то само число неположительно ($|a| = -a$ тогда и только тогда, когда $a \leq 0$). Следовательно, наше уравнение равносильно неравенству

$$2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}.$$

ОТВЕТ: $(-\infty; \frac{3}{2}]$.

ЗАДАЧА 3. (МГУ, ф-т гос. управления, 2001) Решить уравнение

$$|x^2 - 13x + 35| = |35 - x^2|.$$

РЕШЕНИЕ. Если модули двух чисел равны, то эти числа могут отличаться самое большее знаком:

$$|a| = |b| \Leftrightarrow \begin{cases} a = b, \\ a = -b. \end{cases}$$

Следовательно, наше уравнение равносильно совокупности:

$$\begin{cases} x^2 - 13x + 35 = 35 - x^2, \\ x^2 - 13x + 35 = x^2 - 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 13x = 0, \\ 13x = 70. \end{cases}$$

Дальнейшее элементарно.

ОТВЕТ: $0, \frac{13}{2}, \frac{70}{13}$.

2 Замена переменной

В некоторых ситуациях удобно сделать замену $|x - a| = t$, пользуясь тем, что

$$(x - a)^2 = |x - a|^2 = t^2.$$

ЗАДАЧА 4. (МГУ, физический ф-т, 1996) Решить уравнение

$$(x - 7)^2 - |x - 7| = 30.$$

РЕШЕНИЕ. Делаем замену $|x - 7| = t$ и получаем:

$$t^2 - t - 30 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 6, \\ t = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x - 7| = 6, \\ |x - 7| = -5. \end{cases}$$

Второе уравнение полученной совокупности не имеет решений (так как модуль не может быть отрицательным). Решениями первого уравнения служат числа 1 и 13.

ОТВЕТ: 1, 13.

3 Перебор промежутков

В некоторых задачах модуль снимается в процессе рассмотрения различных случаев знаков выражения под модулем с использованием непосредственно определения (1).

ЗАДАЧА 5. Решить уравнение

$$|2 - x| = 5 - 4x.$$

РЕШЕНИЕ. Имеем два случая, в зависимости от знака выражения под модулем. А именно, уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} 2 - x \geq 0, \\ 2 - x = 5 - 4x \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2 - x < 0, \\ x - 2 = 5 - 4x. \end{cases}$$

Решение первой системы: $x = 1$. У второй системы решений нет.

ОТВЕТ: 1.

Не всегда бывает очевидно, принадлежит ли полученное значение x «текущему» промежутку, и тогда приходится использовать оценки.

ЗАДАЧА 6. Решить уравнение

$$x^2 + 4|x - 3| - 7x + 11 = 0.$$

РЕШЕНИЕ. Как и в предыдущей задаче, в зависимости от знака выражения $x - 3$ имеем два случая.

1) $x \geq 3$. Снимаем модуль:

$$\begin{aligned}x^2 + 4(x - 3) - 7x + 11 &= 0, \\x^2 - 3x - 1 &= 0, \\x_1 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}, \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}.\end{aligned}$$

Число x_2 , будучи отрицательным, не удовлетворяет условию $x \geq 3$ и потому не является корнем исходного уравнения.

Выясним, удовлетворяет ли данному условию число x_1 . Для этого составим разность и определим её знак:

$$x_1 - 3 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} - 3 = \frac{\sqrt{13} - 3}{2} = \frac{\sqrt{13} - \sqrt{9}}{2} > 0.$$

Значит, x_1 больше трёх и потому является корнем исходного уравнения.

2) $x < 3$. Снимаем модуль:

$$\begin{aligned}x^2 + 4(3 - x) - 7x + 11 &= 0, \\x^2 - 11x + 23 &= 0, \\x_3 = \frac{11 + \sqrt{29}}{2}, \quad x_4 = \frac{11 - \sqrt{29}}{2}.\end{aligned}$$

Число x_3 больше, чем $11/2$, и потому не удовлетворяет условию $x < 3$. Проверим x_4 :

$$x_4 - 3 = \frac{11 - \sqrt{29}}{2} - 3 = \frac{5 - \sqrt{29}}{2} = \frac{\sqrt{25} - \sqrt{29}}{2} < 0.$$

Значит, x_4 является корнем исходного уравнения.

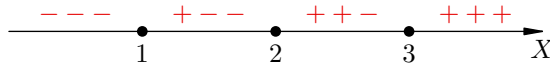
ОТВЕТ: $\frac{3 + \sqrt{13}}{2}, \frac{11 - \sqrt{29}}{2}$.

ЗАДАЧА 7. Решить уравнение

$$|x - 1| - 2|x - 2| + 3|x - 3| = 4.$$

РЕШЕНИЕ. Казалось бы, нас ждёт рассмотрение шести случаев (три выражения под модулем, два знака). Но мы поступим разумнее — используем хорошо знакомый нам метод интервалов.

Выражения под модулями обращаются в нуль в точках $x = 1$, $x = 2$ и $x = 3$. Эти точки делят числовую прямую на четыре промежутка. Отметим на числовой прямой эти точки и расставим знаки для каждого из выражений под модулями на полученных промежутках. (Порядок следования знаков совпадает с порядком следования соответствующих модулей в уравнении.)



Таким образом, мы «экономим на случаях»: нам нужно рассмотреть не шесть случаев, а четыре (когда x находится в каждом из промежутков).

Случай 1: $x \geq 3$. Все модули снимаются «с плюсом»:

$$\begin{aligned} x - 1 - 2(x - 2) + 3(x - 3) &= 4, \\ x &= 5. \end{aligned}$$

Полученное значение $x = 5$ удовлетворяет условию $x \geq 3$ и потому является корнем исходного уравнения.

Случай 2: $2 \leq x \leq 3$. Последний модуль теперь снимается «с минусом»:

$$\begin{aligned} x - 1 - 2(x - 2) + 3(3 - x) &= 4, \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Полученное значение x также годится — оно принадлежит рассматриваемому промежутку.

Случай 3: $1 \leq x \leq 2$. Второй и третий модули снимаются «с минусом»:

$$\begin{aligned} x - 1 - 2(2 - x) + 3(3 - x) &= 4, \\ 4 &= 4. \end{aligned}$$

Мы получили верное числовое равенство при любом x из рассматриваемого промежутка. Это означает, что все числа из промежутка $[1; 2]$ служат решениями данного уравнения.

Случай 4: $x \leq 1$. Все модули снимаются «с минусом»:

$$\begin{aligned} 1 - x - 2(2 - x) + 3(3 - x) &= 4, \\ x &= 1. \end{aligned}$$

Ничего нового. Мы и так знаем, что $x = 1$ является решением.

ОТВЕТ: $[1; 2] \cup \{5\}$.

ЗАДАЧА 8. Решить уравнение

$$||3 - x| - 2x + 1| = 4x - 10.$$

РЕШЕНИЕ. Начинаем с раскрытия внутреннего модуля.

1) $x \leq 3$. Получаем:

$$\begin{aligned} |3 - x - 2x + 1| &= 4x - 10, \\ |4 - 3x| &= 4x - 10. \end{aligned}$$

Выражение под модулем обращается в нуль при $x = \frac{4}{3}$. Данная точка принадлежит рассматриваемому промежутку. Поэтому приходится разбирать два подслучая.

1.1) $\frac{4}{3} \leq x \leq 3$. Получаем в этом случае:

$$\begin{aligned} 3x - 4 &= 4x - 10, \\ x &= 6. \end{aligned}$$

Это значение x не годится, так как не принадлежит рассматриваемому промежутку.

1.2) $x \leq \frac{4}{3}$. Тогда:

$$\begin{aligned}4 - 3x &= 4x - 10, \\ x &= 2.\end{aligned}$$

Это значение x также не годится. Итак, при $x \leq 3$ решений нет.

2) $x \geq 3$. Имеем:

$$\begin{aligned}|x - 3 - 2x + 1| &= 4x - 10, \\ |x + 2| &= 4x - 10.\end{aligned}$$

Здесь нам повезло: выражение $x + 2$ положительно при $x \geq 3$. Поэтому никаких подслучаев уже не будет: модуль снимается «с плюсом»:

$$\begin{aligned}x + 2 &= 4x - 10, \\ x &= 4.\end{aligned}$$

Это значение x находится в рассматриваемом промежутке и потому является корнем исходного уравнения.

ОТВЕТ: 4.

Исследование знака выражения под модулем и раскрытие модуля по определению (1) — метод универсальный, но не всегда самый эффективный. В некоторых случаях можно «выкрутиться» иначе, существенно упростив решение.

4 Равносильные переходы

Рассмотрим уравнение

$$|A| = B, \tag{2}$$

где A и B — некоторые выражения, содержащие переменную. Ясно, что если $B < 0$, то уравнение (2) не имеет решений. Если же $B \geq 0$, то уравнение (2) сводится к совокупности двух уравнений $A = \pm B$.

Таким образом, для уравнения (2) имеем равносильный переход:

$$|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} A = B, \\ A = -B, \end{array} \right. \\ B \geq 0. \end{cases}$$

Иными словами, мы решаем два уравнения, $A = B$ и $A = -B$, а потом отбираем корни, удовлетворяющие условию $B \geq 0$.

ЗАДАЧА 9. Решить уравнение

$$|2x^2 - 3x - 4| = 6x - 1.$$

РЕШЕНИЕ. Попробуйте ради интереса снять модуль с квадратного трёхчлена, как мы это сделали в предыдущей задаче, и посмотрите, к чему это приведёт. Поэтому мы будем действовать с помощью только что описанного равносильного перехода.

Наше уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \begin{cases} 2x^2 - 3x - 4 = 6x - 1, \\ 2x^2 - 3x - 4 = 1 - 6x, \end{cases} \\ 6x - 1 \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

Первое уравнение совокупности (3) имеет корни

$$x_1 = \frac{9 + \sqrt{105}}{4}, \quad x_2 = \frac{9 - \sqrt{105}}{4}.$$

Второе уравнение совокупности (3) имеет корни

$$x_3 = 1, \quad x_4 = -\frac{5}{2}.$$

Теперь для каждого из полученных корней проверяем выполнение неравенства (3):

$$\begin{aligned} 6x_1 - 1 &= 6 \cdot \frac{9 + \sqrt{105}}{4} - 1 = \frac{50 + 6\sqrt{105}}{4} > 0; \\ 6x_2 - 1 &= 6 \cdot \frac{9 - \sqrt{105}}{4} - 1 = \frac{50 - 6\sqrt{105}}{4} = \frac{\sqrt{2500} - \sqrt{3780}}{4} < 0; \\ 6x_3 - 1 &= 6 - 1 > 0; \\ 6x_4 - 1 &= -15 - 1 < 0. \end{aligned}$$

Стало быть, годятся лишь x_1 и x_3 .

ОТВЕТ: $1, \frac{9 + \sqrt{105}}{4}$.

5 Задачи

Во всех задачах требуется решить уравнение или систему уравнений.

Определение модуля

1. $|x^2 - 5x + 4| = 4.$

2. $|x^2 - 3x + 2| = 3x - 2 - x^2.$

3. $|x^2 + x - 3| = |5x - 4|.$

4. (МГУ, физический ф-т, 1983) $|x^2 - 12| = 4.$

5. (МГУ, МШЭ, 2005) $|2x - 4| + 4 = 2x.$

6. (МГУ, химический ф-т, 2005) $|2x + 1| = |x + 2|$.

17

7. (МГУ, химический ф-т, 2001)

$$\left| \frac{x-1}{x-2} \right| = \left| \frac{x+1}{x+2} \right|.$$

2^0

8. (МГУ, мехмат, 1995)

$$\frac{|x^3| - |5x|}{\sqrt{2x^2 - 4x - 1} - |x| + 2} = 0.$$

2^-

Замена переменной

9. (МГУ, биологич. ф-т, 2005) $x^2 + |x| - 6 = 0$.

27

10. (МГУ, физический ф-т, 1990) $x^2 - 4|x| - 1 = 0$.

(2^+ + 2)7

11. (МГУ, ВМК, 1994)

$$\left(4|x-1| + \frac{1}{2} \right)^2 = 11(x-1)^2 + \frac{5}{4}.$$

2/6, 2/4

12. (МГУ, филологич. ф-т, 2005) $|x^2 - 3|x| + 1| = 1$.

27, 27, 17, 0

Перебор промежутков

13. (МГУ, химический ф-т, 2000) $|x| = 2 - x$.

1

14. (МГУ, геологич. ф-т, 1990)

$$-\frac{|x|}{x} - x = \frac{x^2}{2} + 1.$$

2-

15. (МГУ, ф-т почвоведения, 2004) $|5x + 1| + 7x + 2 = 0$.

2/1

16. (МГУ, экономич. ф-т, 1981) $x^2 - 6x + 8 + |x - 4| = 0$.

7, 3, 4

17. (МГУ, экономич. ф-т, 2000) $3|x + 2| + x^2 + 6x + 2 = 0$.

1-4-

18. (МГУ, экономич. ф-т, 2000) $3\sqrt{x^2 + 2x + 1} = 7 + x + (\sqrt{-x^2 - 5x - 4})^2$.

8-

19. (МГУ, ф-т психологии, 2005) $|x - 2| + 2|x + 1| = 9$.

87

20. (МГУ, географич. ф-т, 2000) $|2x + 8| - |x - 5| = 12$.

8, 25, 3

21. (МГУ, биологич. ф-т, 1995) $|x - 1| + |2x - 3| = 2$.

2, 3, 2

22. (МГУ, географич. ф-т, 1996) $|5x - 3| - |7x - 4| = 2x - 1$.

[$\frac{1}{4}; \infty$)-

23. (МГУ, филологич. ф-т, 1988)

$$\begin{cases} 2|x - 2| + 3|y + 1| = 4, \\ 2x - y = 3. \end{cases}$$

($\frac{7}{8}; \frac{7}{8}$), (0, $\frac{7}{8}$)

24. (МГУ, ИСАА, 2003) $(|x - 5|)^2 - |5 - x| = 30$.

$\frac{7}{191} \sqrt{11} - 11$

25. (МГУ, ИСАА, 1997) $4|x + 1| - 1 = 3|2x + 5| - 2|x + 5|$.

$\{\frac{7}{9}\} \cap [9; \infty)$

26. (МГУ, ВМК, 1997)

$$\begin{cases} |x^2 - 4y + 3| + y = 1, \\ 2x + 2y = 1. \end{cases}$$

($\frac{7}{61} \sqrt{9}; \frac{7}{9-61} \sqrt{}$), ($\frac{7}{2} \sqrt{7}; \frac{7}{8-2} \sqrt{}$)

27. (МГУ, ф-т почвоведения, 2007) $||x - 1| - 7| = 10$.

81, 91-

28. (МГУ, геологич. ф-т, 1998) $||4 - x^2| - x^2| = 1$.

$\frac{7}{2} \sqrt{7}; \frac{7}{8} \sqrt{7}$

29. (МГУ, экономич. ф-т, 1989) $|x + 1 + |-x - 3|| - 6 = x.$

-4, 2

30. (МГУ, ф-т психологии, 1998) $|4x - |x - 2| + 3| = 16.$

$\frac{8}{11}, \frac{9}{11}$

31. (МГУ, физический ф-т, 1997)

$$\begin{cases} y + |x + 1| = 1, \\ |y - x| = 5. \end{cases}$$

$(\frac{7}{5}, \frac{7}{5})$

32. («Физтех», 2018, 9) Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от шестнадцати последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 276, а сумма расстояний от этих же шестнадцати чисел до некоторого числа b равна 748. Найдите все возможные значения a , если известно, что $a + b = 62,5$.

$\frac{7}{8} = v$

33. («Физтех», 2018, 9) Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от тринадцати последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 260, а сумма расстояний от этих же тринадцати чисел до числа a^2 равна 1768. Найдите все возможные значения a .

$81 = v$ или $71 = v$

34. («Физтех», 2018, 10) Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от девяти последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 294, а сумма расстояний от этих же девяти чисел до некоторого числа b равна 1932. Найдите все возможные значения a , если известно, что $a + b = 256$.

$\frac{8}{992} = v$ или $\frac{8}{81} = v$

35. («Физтех», 2018, 10) Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от двадцати последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 4460, а сумма расстояний от этих же двадцати чисел до числа a^2 равна 2755. Найдите все возможные значения a .

$\frac{7}{63} = v$ или $\frac{7}{23} = v$

36. («Физтех», 2018, 11) Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от одиннадцати последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 902, а сумма расстояний от этих же одиннадцати чисел до некоторого числа b равна 374. Найдите все возможные значения a , если известно, что $a + b = 98$.

$\{97, 6, 20\} \ni v$

37. («Физтех», 2018, 11) Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от восемнадцати последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 1005, а сумма расстояний от этих же восемнадцати чисел до числа a^2 равна 865. Найдите все возможные значения a .

$$\frac{x}{2} = v$$

38. (Всеросс., 2018, финал, 10.1) Найдите количество корней уравнения

$$|x| + |x + 1| + \dots + |x + 2018| = x^2 + 2018x - 2019.$$

Равносильные переходы

39. (МГУ, геологич. ф-т, 1991) $|x^2 - 2x - 1| - x + 1 = 0$.

$$2, 3$$

40. (МГУ, социологич. ф-т, 2000) $|x^2 - 3x| = 2x - 4$.

$$4, \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$$