

Неравенства с модулем

Содержание

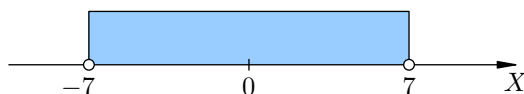
1	Геометрический смысл модуля	1
2	Замена переменной	2
3	Перебор промежутков	3
4	Равносильные переходы	4
5	Задачи	8

Данная статья продолжает предыдущую статью «[Уравнения с модулем](#)». Мы рассматриваем в целом аналогичные ситуации, только вместо знака равенства будет стоять знак неравенства.

1 Геометрический смысл модуля

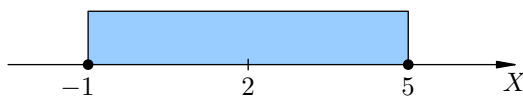
Понятие модуля обладает простым геометрическим смыслом: именно, $|x|$ есть расстояние от точки x до нуля. Более общим образом, $|x - a|$ есть расстояние от точки x до точки a . Давайте рассмотрим несколько элементарных примеров.

1. Решениями неравенства $|x| < 7$ служат все те x , которые удалены от нуля на расстояние, меньшее 7. Они расположены на интервале $(-7; 7)$.



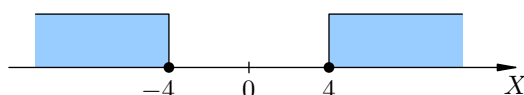
Множество решений неравенства $|x| < 7$

2. Решения неравенства $|x - 2| \leq 3$ суть все те x , которые удалены от точки 2 на расстояние, не превосходящее 3; они заполняют отрезок $[-1; 5]$.



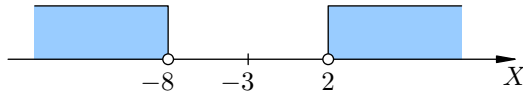
Множество решений неравенства $|x - 2| \leq 3$

3. Решениями неравенства $|x| \geq 4$ являются все x , удалённые от нуля на расстояние, не меньшее 4. Это объединение двух непересекающихся лучей: $(-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$.



Множество решений неравенства $|x| \geq 4$

4. Решениями неравенства $|x + 3| > 5$ являются все те x , которые удалены от точки -3 на расстояние, большее 5. Это объединение двух непересекающихся лучей с выколотыми началами: $(-\infty; -8) \cup (2; +\infty)$.



Множество решений неравенства $|x + 3| > 5$

ЗАДАЧА 1. (МГУ, геологич. ф-т, 2001) Решить неравенство

$$\frac{|x - 3| + 2}{|2x - 3| - 5} \leq 0.$$

РЕШЕНИЕ. Числитель дроби положителен при всех x , поэтому данное неравенство равносильно отрицательности знаменателя:

$$|2x - 3| - 5 < 0 \Leftrightarrow |2x - 3| < 5.$$

Дальше понятно: величина $2x$ удалена от точки 3 на расстояние, меньшее 5:

$$-2 < 2x < 8,$$

откуда $-1 < x < 4$.

ОТВЕТ: $(-1; 4)$.

2 Замена переменной

В некоторых неравенствах оказывается полезной замена $|x - a| = t$.

ЗАДАЧА 2. (МГУ, физический ф-т, 2004) Решить неравенство

$$\frac{|x - 2|}{\frac{12}{|x-2|} - 1} > 1.$$

РЕШЕНИЕ. Делаем замену $|x - 2| = t$:

$$\frac{t}{\frac{12}{t} - 1} > 1.$$

Данное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{t^2}{12 - t} > 1,$$

(поскольку запрещённое значение $t = 0$ не является решением последнего), которое, в свою очередь, равносильно

$$\frac{t^2 + t - 12}{t - 12} < 0 \Leftrightarrow \frac{(t + 4)(t - 3)}{t - 12} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t < -4, \\ 3 < t < 12, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} |x - 2| < -4, \\ 3 < |x - 2| < 12. \end{cases}$$

Первое неравенство полученной совокупности не имеет решений. Решениями второго неравенства служат значения x , удалённые от точки $x = 2$ на расстояние больше 3, но меньше 12, то есть $-10 < x < -1$ и $5 < x < 14$.

ОТВЕТ: $(-10; -1) \cup (5; 14)$.

ЗАДАЧА 3. (МГУ, ф-т почвоведения, 2003) Решить неравенство

$$\frac{3|y|}{4} - y^2 \leq 0.$$

РЕШЕНИЕ. Делаем замену $|y| = t$:

$$\frac{3t}{4} - t^2 \leq 0 \Leftrightarrow t \left(t - \frac{3}{4} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 0, \\ t \geq \frac{3}{4}, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} |y| \leq 0, \\ |y| \geq \frac{3}{4}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0, \\ y \geq \frac{3}{4}, \\ y \leq -\frac{3}{4}. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $(-\infty; -\frac{3}{4}] \cup \{0\} \cup [\frac{3}{4}; +\infty)$.

3 Перебор промежутков

В некоторых неравенствах модуль снимается «в лоб» — путём рассмотрения значений переменной на различных промежутках.

ЗАДАЧА 4. (МГУ, экономич. ф-т, 1984) Решить неравенство

$$2|x - 4| + |3x + 5| \geq 16.$$

РЕШЕНИЕ. Разбираем три случая расположения x относительно точек $-\frac{5}{3}$ и 4.

1) $x \geq 4$. Имеем:

$$\begin{aligned} 2(x - 4) + 3x + 5 &\geq 16, \\ x &\geq \frac{19}{5}. \end{aligned}$$

Полученное неравенство выполняется при всех рассматриваемых $x \geq 4$. Иными словами, все числа из промежутка $[4; +\infty)$ являются решениями нашего неравенства.

2) $-\frac{5}{3} \leq x \leq 4$. Имеем в данном случае:

$$\begin{aligned} 2(4 - x) + 3x + 5 &\geq 16, \\ x &\geq 3. \end{aligned}$$

Учитывая, в каком промежутке мы сейчас находимся, получаем в качестве решений исходного неравенства множество $[3; 4]$.

3) $x \leq -\frac{5}{3}$. Имеем:

$$\begin{aligned} 2(4 - x) - 3x - 5 &\geq 16, \\ x &\leq -\frac{13}{5}. \end{aligned}$$

Так как $-\frac{13}{5} < -\frac{5}{3}$, то все значения x из полученного промежутка $(-\infty, -\frac{13}{5}]$ служат решениями исходного неравенства.

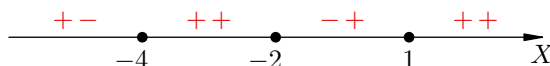
Остаётся объединить множества решений, полученные в трёх рассмотренных случаях.

ОТВЕТ: $(-\infty, -\frac{13}{5}] \cup [3; +\infty)$.

ЗАДАЧА 5. (МГУ, биологич. ф-т, 1998) Решить неравенство

$$|x^2 + x - 2| + |x + 4| \leq x^2 + 2x + 6.$$

РЕШЕНИЕ. Выражение $x^2 + x - 2$ положительно при $x < -2$, $x > 1$ и отрицательно при $-2 < x < 1$. Выражение $x + 4$ положительно при $x > -4$ и отрицательно при $x < -4$. Расставим знаки наших выражений на числовой оси (первым идёт знак квадратного трёхчлена, вторым — знак линейной функции):



Теперь понятно, что нам нужно рассмотреть *три* случая.

1) $x \leq -4$. При снятии модулей квадратный трёхчлен остаётся со знаком плюс, линейная функция — с минусом:

$$\begin{aligned} x^2 + x - 2 - x - 4 &\leq x^2 + 2x + 6, \\ x &\geq -6. \end{aligned}$$

Таким образом, здесь имеем решения $-6 \leq x \leq -4$.

2) $-4 \leq x \leq -2$ или $x \geq 1$. При снятии модулей оба выражения остаются с плюсом:

$$\begin{aligned} x^2 + x - 2 + x + 4 &\leq x^2 + 2x + 6, \\ 2 &\leq 6. \end{aligned}$$

Получилось верное числовое равенство. Значит, рассматриваемые значения $-4 \leq x \leq -2$ и $x \geq 1$ являются решениями нашего неравенства.

3) $-2 \leq x \leq 1$. При снятии модулей квадратный трёхчлен остаётся с минусом, линейная функция — с плюсом:

$$\begin{aligned} -x^2 - x + 2 + x + 4 &\leq x^2 + 2x + 6, \\ x^2 + x &\geq 0. \end{aligned}$$

Полученное неравенство имеет решения $x \leq -1$ или $x \geq 0$. В пересечении с рассматриваемым промежутком имеем множество решений исходного неравенства: $-2 \leq x \leq -1$ или $0 \leq x \leq 1$.

Объединяя множества решений в трёх рассмотренных случаях, получаем ответ.

ОТВЕТ: $[-6; -1] \cup [0; +\infty)$.

4 Равносильные переходы

«Лобовое» снятие модуля (путём перебора промежутков) не всегда является самым эффективным средством. В некоторых неравенствах бывает проще переходить к равносильным системам или совокупностям условий.

Умножение на модуль

Как известно, неравенство можно умножить на положительную величину (с сохранением знака неравенства). В частности, имеет место эквивалентность

$$\frac{A}{|B|} < C \Leftrightarrow \begin{cases} A < |B|C, \\ B \neq 0 \end{cases}$$

(A, B, C — некоторые выражения, знак неравенства может быть любым). Такой переход может сократить вычислительную работу.

ЗАДАЧА 6. (МГУ, ВМК, 1998) Решить неравенство

$$3x < \frac{4x - 2}{|x - 3|}.$$

РЕШЕНИЕ. Непосредственное снятие модуля приводит к двум рациональным неравенствам, но лучше сразу умножить на $|x - 3|$. Наше неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 3x|x - 3| < 4x - 2, \\ x \neq 3, \end{cases}$$

которая равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} x > 3, \\ 3x(x - 3) < 4x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3, \\ 3x^2 - 13x + 2 < 0 \end{cases} \quad (1)$$

и

$$\begin{cases} x < 3, \\ 3x(3 - x) < 4x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ 3x^2 - 5x - 2 > 0. \end{cases} \quad (2)$$

Решения системы (1) образуют множество $3 < x < \frac{13 + \sqrt{145}}{6}$. Решения системы (2) суть два промежутка $x < -\frac{1}{3}$ и $2 < x < 3$.

ОТВЕТ: $(-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (2; 3) \cup (3; \frac{13 + \sqrt{145}}{6})$.

Задача простая, и выигрыш от умножения на модуль здесь не так уж велик. Однако в следующей задаче равносильное умножение неравенства позволит очень существенно сэкономить на выкладках.

ЗАДАЧА 7. (МГУ, мех.мат, 2000) Решить неравенство

$$\frac{|x - 5| - |x + 4|}{|x - 2| - |x + 1|} < \frac{|x - 2| + |x + 1|}{|x + 4|}. \quad (3)$$

РЕШЕНИЕ. Непосредственное снятие модулей означает перебор пяти промежутков, что не вызывает энтузиазма. Поэтому действуем иначе: при ограничении $x \neq -4$ умножаем обе части неравенства (3) на положительную величину $\frac{|x+4|}{|x-2|+|x+1|}$ и получаем равносильное неравенство

$$\begin{aligned} \frac{|(x - 5)(x + 4)| - (x + 4)^2}{(x - 2)^2 - (x + 1)^2} < 1 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{|x^2 - x - 20| - x^2 - 8x - 16}{-6x + 3} < 1 &\Leftrightarrow \frac{|x^2 - x - 20| - x^2 - 2x - 19}{2x - 1} > 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Пусть $x \in E_1 = (-\infty; -4) \cup [5; +\infty)$. Тогда $x^2 - x - 20 \geq 0$, и неравенство (4) равносильно неравенству

$$\frac{-3x - 39}{2x - 1} > 0 \Leftrightarrow \frac{x + 13}{2x - 1} < 0 \Leftrightarrow -13 < x < \frac{1}{2},$$

что в пересечении с множеством E_1 даёт часть решений исходного неравенства (3):

$$\boxed{-13 < x < -4.} \quad (5)$$

Пусть теперь $x \in E_2 = (-4; 5)$. Тогда $x^2 - x - 20 < 0$, и неравенство (4) равносильно неравенству

$$\frac{-2x^2 - x + 1}{2x - 1} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x + 1)(2x - 1)}{2x - 1} < 0,$$

решения которого суть $x < -1$. В пересечении с множеством E_2 получаем вторую часть решений исходного неравенства:

$$\boxed{-4 < x < -1.} \quad (6)$$

Множество решений неравенства (3) есть объединение «рамочек» (5) и (6).

ОТВЕТ: $(-13; -4) \cup (-4; -1)$.

Неравенства вида $|A| < B$

Пусть A и B — некоторые выражения с переменной. Оказывается, неравенство

$$|A| < B \quad (7)$$

равносильно системе

$$\begin{cases} A < B, \\ A > -B. \end{cases} \quad (8)$$

Действительно, если $B > 0$, то эквивалентность (7) \Leftrightarrow (8) очевидна. В случае $B \leq 0$ неравенство (7) не имеет решений; но и система (8) также не имеет решений, поскольку выражение A не может быть одновременно меньше неположительной величины B и больше неотрицательной величины $-B$. Следовательно, и при $B \leq 0$ имеем (7) \Leftrightarrow (8).

На экзамене или олимпиаде вам придётся привести эти рассуждения, доказывающие законность рассмотренного перехода

$$|A| < B \Leftrightarrow \begin{cases} A < B, \\ A > -B. \end{cases} \quad (9)$$

Но оно того стоит! Это наглядно демонстрирует следующий пример.

Задача 8. Решить неравенство

$$|x^2 - 3x + 1| < x - 2.$$

РЕШЕНИЕ. Ради интереса попробуйте снять модуль как раньше, исследуя знак квадратного трёхчлена. Во-первых, вы сразу получите иррациональные корни. Затем, после снятия модуля и упрощений, вас поджидают другие иррациональные корни, которые придётся сравнивать с первыми. Однако значительную часть этих технических проблем удаётся обойти, используя переход (9).

А именно, наше неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 1 < x - 2, \\ x^2 - 3x + 1 > 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 < 0, \\ x^2 - 2x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 3, \\ \begin{cases} x > 1 + \sqrt{2}, \\ x < 1 - \sqrt{2}. \end{cases} \end{cases}$$

Вот и всё. Теперь легко получаем ответ.

ОТВЕТ: $(1 + \sqrt{2}; 3)$.

Переход (9) сохраняет свой вид при замене строгого равенства на нестрогое:

$$|A| \leq B \Leftrightarrow \begin{cases} A \leq B, \\ A \geq -B. \end{cases} \quad (10)$$

Доказательство эквивалентности (10) совершенно аналогично тому, что приведено выше.

Неравенства вида $|A| > B$

Неравенство

$$|A| > B \quad (11)$$

равносильно совокупности

$$\begin{cases} A > B, \\ A < -B. \end{cases} \quad (12)$$

В самом деле, если $B \geq 0$, то эквивалентность (11) \Leftrightarrow (12) очевидна. Если же $B < 0$, то неравенство (11) выполнено при всех допустимых значениях x ; но и решением совокупности (12) служат все те же допустимые x , поскольку одно из неравенств совокупности заведомо выполнено (при $A \geq 0$ выполнено $A > B$, а при $A < 0$ выполнено $A < -B$). Следовательно, и при $B < 0$ имеет место эквивалентность (11) \Leftrightarrow (12).

Разумеется, эквивалентность сохраняется при замене строгого неравенства на нестрогое:

$$|A| \geq B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq B, \\ A \leq -B. \end{cases} \quad (13)$$

Задача 9. (МГУ, ВМК, 2000) Решить неравенство

$$||x^2 - 8x + 2| - x^2| \geq 2x + 2.$$

РЕШЕНИЕ. Здесь используются оба эквивалентных перехода (13) и (10). Имеем:

$$\begin{aligned} ||x^2 - 8x + 2| - x^2| \geq 2x + 2 &\Leftrightarrow \begin{cases} |x^2 - 8x + 2| - x^2 \geq 2x + 2, \\ |x^2 - 8x + 2| - x^2 \leq -2x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |x^2 - 8x + 2| \geq x^2 + 2x + 2, \\ |x^2 - 8x + 2| \leq x^2 - 2x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 8x + 2 \geq x^2 + 2x + 2, \\ x^2 - 8x + 2 \leq -x^2 - 2x - 2, \\ \begin{cases} x^2 - 8x + 2 \leq x^2 - 2x - 2, \\ x^2 - 8x + 2 \geq -x^2 + 2x + 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0, \\ x^2 - 3x + 2 \leq 0, \\ \begin{cases} x \geq \frac{2}{3}, \\ x^2 - 5x \geq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0, \\ 1 \leq x \leq 2, \\ x \geq 5. \end{cases} \end{aligned}$$

ОТВЕТ: $(-\infty; 0] \cup [1; 2] \cup [5; +\infty)$.

Неравенства вида $|A| < |B|$

Решая неравенство вида $|A| < |B|$ (знак неравенства тут может быть любым), удобно действовать следующим образом: коль скоро обе части неравенства неотрицательны, можно возвести неравенство в квадрат:

$$|A| < |B| \Leftrightarrow A^2 < B^2 \Leftrightarrow A^2 - B^2 < 0 \Leftrightarrow (A - B)(A + B) < 0.$$

Последнее неравенство решается, например, методом интервалов.

ЗАДАЧА 10. (МГУ, экономич. ф-т, 2001) Решить неравенство

$$|x^2 + 10x + 16| \geq |x^2 - 16|.$$

РЕШЕНИЕ. Данное неравенство равносильно неравенству

$$(x^2 + 10x + 16)^2 \geq (x^2 - 16)^2 \Leftrightarrow (10x + 32)(2x^2 + 10x) \geq 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{16}{5}\right)x(x + 5) \geq 0.$$

Дальнейшее элементарно.

ОТВЕТ: $[-5; -\frac{16}{5}] \cup [0; +\infty)$.

5 Задачи

Во всех задачах по умолчанию требуется решить неравенство.

Геометрический смысл модуля

1. а) $|x - 6| \leq 4$; б) $|2x + 3| > 11$.

$$(\infty+; 4] \cap [2-; \infty-)$$

2. (МГУ, физический ф-т, 1996) $-1 < |x^2 - 7| < 29$.

$$(9; 9-)$$

3. (МГУ, ИСАА, 2007) $|x + 3| \cdot (|x - 1| - 3) \leq 0$.

$$[-7; 2-] \cup \{8\}$$

4. (МГУ, МШЭ, 2007)

$$\left|\frac{x}{10} - \frac{1}{5}\right| \geq \left|\frac{x}{4} - \frac{1}{2}\right|.$$

$$[2]$$

Замена переменной

5. (МГУ, географич. ф-т, 1997)

$$\frac{|x - 1| + 10}{4|x - 1| + 3} > 2.$$

$$\left(\frac{1}{11}; \frac{1}{8}\right)$$

6. (МГУ, ф-т почвоведения, 1998)

$$\frac{1}{|x+1|-1} \geq \frac{1}{|x+1|-2}.$$

$$(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cap (\mathbb{R} \setminus \{-1\})$$

7. (МГУ, физический ф-т, 2004)

$$\frac{|x-1|}{1 - \frac{6}{|x-1|}} < -1.$$

$$(\mathbb{R} \setminus \{6\}) \cap (\mathbb{R} \setminus \{-1\})$$

8. (МГУ, ФНМ, 2004)

$$|3x+1|+2 + \frac{3}{|3x+1|-2} \leq \frac{1}{|3x+1|+2}.$$

$$\left(\frac{\mathbb{R}}{3} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}\right) \cap \left\{\frac{\mathbb{R}}{3}\right\} \cap \left[\frac{\mathbb{R}}{3} \setminus \{-1\}\right]$$

9. (МГУ, географич. ф-т, 1987) $x^2 + 2|x| < 8.$

$$(\mathbb{R} \setminus \{-2\})$$

10. (МГУ, ф-т почвоведения, 2003)

$$\frac{3x^2}{2} - |x| \geq 0.$$

$$(\infty + \frac{\mathbb{R}}{2}] \cap \{0\} \cap [\frac{\mathbb{R}}{2} - \infty)$$

11. а) $x^2 + 2x - |x+1| > 5;$ б) $x^2 - 4x + 8 - 5|x-2| \leq 0.$

$$[9; 3] \cap [1; 7] \cap (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cap (\mathbb{R} \setminus \{-1\}) \cap (\mathbb{R} \setminus \{2\})$$

Перебор промежутков

12. (МГУ, геологич. ф-т, 2005) $(|x|-1)(2x^2+x-1) \leq 0.$

$$[1; \frac{2}{3}] \cap \{-1\}$$

13. (МГУ, геологич. ф-т, 2006)

$$\frac{x^2-9}{|x|-3} \cdot (x+4) \geq 0.$$

$$[-4; -3) \cup (3; 3) \cup (3; +\infty)$$

14. (МГУ, ИСАА, 1998)

$$\frac{3|x|-11}{x-3} > \frac{3x+14}{6-x}.$$

$$(\infty + 2) \cap (3; 2) \cap (2; 7)$$

15. (МГУ, геологич. ф-т, 2002)

$$\frac{x|x|+1}{x-2} + 1 \geq x.$$

$$(\infty+; 2) \cap \left[\frac{5}{4}; \infty-\right)$$

16. (МГУ, геологич. ф-т, 2004)

$$\frac{x-2}{|x-2|} \leq 4-x^2.$$

$$\left(\frac{2}{3}; \sqrt{5} \wedge -\right]$$

17. (МГУ, химический ф-т, 2007)

$$\frac{x^2+4x+4}{2x+12} \leq 1 - \frac{\sqrt{x^2+8x+16}}{x+4}.$$

$$\{-2\} \cap \left(4 - \frac{5}{2} \sqrt{5}; -2\right] \cap (9; \infty-)$$

18. (МГУ, ФНМ, 2003)

$$\frac{4x}{|x-2|-1} \geq 3.$$

$$(\infty+; 3) \cap \left(1; \frac{7}{8}\right]$$

19. (МГУ, геологич. ф-т, 2003)

$$\frac{x-2}{|x+2|} + \frac{2x+5}{x+2} \leq 0.$$

$$\left[1 - \frac{1}{2}; -\right) \cap \left(-\frac{1}{2}; -2\right]$$

20. (МГУ, мехмат, 1985.2)

$$\frac{1}{x-1} + \frac{3}{|x|+1} \geq \frac{1}{|x|-1}.$$

$$(\infty+; 1) \cap (1; 1-) \cap \left[\frac{5}{8}; \infty-\right)$$

21. (МГУ, мехмат, 2004-07.2)

$$\frac{(x^2+x+1)^2 - 2|x^3+x^2+x| - 3x^2}{10x^2 - 17x - 6} \geq 0.$$

$$(\infty+; 2) \cap \{1\} \cap \left[\frac{5}{8} \wedge + 2 - \frac{01}{8}; -\right) \cap \left[\frac{5}{8} \wedge - 2 - \infty-\right)$$

22. (МГУ, социологич. ф-т, 1999)

$$\frac{2|2-x|}{2-|x|} \leq |x-2|.$$

$$(\infty+; 2) \cap \{0\} \cap (2 - \infty-)$$

23. (МГУ, экономич. ф-т, 1984) $3|x - 2| + |5x - 4| \leq 10$.

$$\left[\frac{2}{3}; 0\right]$$

24. (МГУ, ф-т гос. управления, 2003) $|2x + 8| \geq 8 - |1 - x|$.

$$(\infty + ; 1 -] \cap [9 - ; \infty -)$$

25. (МГУ, ВМК, 2003) $3|x + 2| - 4|x + 1| \geq 2$.

$$\left[0; \frac{4}{8} - \right]$$

26. (МГУ, филологич. ф-т, 1991)

$$\frac{|x + 1| + |x - 2|}{x + 199} < 1.$$

$$(007 ; 99 -) \cap (661 - ; \infty -)$$

27. (МГУ, геологич. ф-т, 1985)

$$\frac{|x - 2|}{|x - 1| - 1} \geq 1.$$

$$(\infty + ; 2) \cap (0 ; \infty -)$$

28. (МГУ, ИСАА, 1992)

$$\frac{|x + 3| - 1}{4 - 2|x + 4|} \geq -1.$$

$$(\infty + ; 2 -) \cap (2 - ; 9 -) \cap [8 - ; \infty -)$$

29. (МГУ, ф-т психологии, 1979)

$$\frac{3}{|x + 3| - 1} \geq |x + 2|.$$

$$\left[\frac{9}{2} \wedge + 2 - ; 2 - \right) \cap (4 - ; 9 -]$$

30. (МГУ, химический ф-т, 2000) $|x + |1 - x|| > 3$.

$$(\infty + ; 2)$$

31. (МГУ, геологич. ф-т, 1998)

$$\left| \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right| - 3x + 3\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{3x^2}{2} - \left| \frac{x^2}{2} + x - \sqrt{2} \right|.$$

$$\left(\infty + ; 1 + \frac{2}{\sqrt{2}} \wedge + 1 - \right) \cap \left(1 + \frac{2}{\sqrt{2}} \wedge - 1 - ; \infty - \right)$$

32. («Физтех», 2011.3)

$$\frac{20 - 4|x|}{|x^2 + 11x + 21| - 3} \leq 1.$$

$$\left(\infty+; \frac{7}{9} \right] \cap (2-; 8-) \cap [4-; 8-) \cap (6-; \infty-)$$

Равносильные переходы

33. («Физтех», 2017, 9.2) $x^2 - 2x + 1 - |x^3 - 1| - 2(x^2 + x + 1)^2 \geq 0.$

$$\left[\frac{7}{11}; 1- \right]$$

34. («Физтех», 2020, 9.4) $2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x - 1| + 1 \geq 0.$

$$\left(\infty+; \frac{7}{9} \right] \cap \left[\frac{7}{11}; 1- \right] \cap \left[\frac{7}{9}; \infty- \right)$$

35. («Физтех», 2020, 10.4) $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0.$

$$\left(\infty+; 1 \right] \cap \left[\frac{7}{11}; \frac{7}{9} \right] \cap [2-; \infty-)$$

36. (МГУ, мех.мат, 2000-03.1)

$$\frac{|x - 4| - |x - 1|}{|x - 3| - |x - 2|} < \frac{|x - 3| + |x - 2|}{|x - 4|}.$$

$$(3; 4) \cup (4; 7)$$

37. (МГУ, геологич. ф-т, 1998) $(x^2 + 5x - 6) \cdot |x + 4|^{-1} < 0.$

$$(-6; -4) \cup (-4; 1)$$

38. (МГУ, филологич. ф-т, 2006)

$$\frac{5 - 4x}{|x - 2|} \leq |2 - x|.$$

$$\left(\infty+; 2 \right) \cup (2; 1] \cap [1-; \infty-)$$

39. (МГУ, ВШБ, 2004)

$$\frac{x + 1}{|x - 1|} \geq 1.$$

$$\left(\infty+; 1 \right) \cup (1; 0]$$

40. (МГУ, географич. ф-т, 2003)

$$\frac{6}{|x|} \geq 7 + x.$$

$$\left[\frac{7}{2}; \frac{7}{9} \right) \cap (0; 1-] \cap [9-; \infty-)$$

41. (МГУ, ВМК, 1998)

$$2x > \frac{5x + 3}{|x + 2|}.$$

$$\left(\infty + ; \frac{3}{5} \right) \cap (1 - ; 2 -) \cap \left(2 - ; \frac{5}{25^{\wedge} + 6} - \right)$$

42. (МГУ, биологич. ф-т, 1999)

$$\frac{3}{|x - 1|} \geq 2x + 5.$$

$$\left[\frac{5}{5 - 25^{\wedge}} ; 1 \right] \cap (1 ; \frac{3}{5}) \cap [2 - ; \infty -)$$

43. (МГУ, социологич. ф-т, 2001)

$$\frac{1}{x + 1} + \frac{1}{|x|} \geq 2.$$

$$\left[\frac{5^{\wedge}}{1} ; 0 \right] \cap (0 ; 1 -)$$

44. (МГУ, геологич. ф-т, 2002)

$$\frac{x + 1}{|2 - x|} + \frac{x + 1}{x - 5} \leq 0.$$

$$(5 ; \frac{5}{2}) \cap [1 - ; \infty -)$$

45. (МГУ, геологич. ф-т, 2007)

$$|x - 12| \leq \frac{x}{12 - x}.$$

$$(21 ; 6)$$

46. («Физтех», 2017, 9.2) $|x^3 - 2x^2 + 2| \geq 2 - 3x.$

$$(\infty + ; 0] \cap \left[\frac{2}{21^{\wedge} - 1} ; \infty - \right)$$

47. (МГУ, физический ф-т, 1998) $|x^2 + 2x - 7| < 2x.$

$$(2^{\wedge} ; 11^{\wedge} + 2 -)$$

48. (МГУ, физический ф-т, 2003) $|x^2 + 3x| + x^2 - 2 \geq 0.$

$$(\infty + ; \frac{5}{1}) \cap [\frac{5}{2} - ; \infty -)$$

49. $||x^3 - x - 1| - 5| \geq x^3 + x + 8.$

$$[9^{\wedge} - ; \infty -)$$

50. (МГУ, ВМК, 2000) $||x^2 + 3x - 8| - x^2| \geq 8 - x.$

$$(\infty + ; 4] \cap [0 ; 1 -] \cup [4 - ; \infty -)$$

51. (МГУ, ф-т глобальных процессов, 2006)

$$\frac{|x^2 + x - 12|}{x - 3} \geq 1.$$

$(\infty+; 8)$

52. (МГУ, ф-т почвоведения, 2005) $|x - 1| \leq |x|$.

$(\infty+; \frac{2}{3}]$

53. (Моск. матем. регата, 2001, 8) $|x + 2000| < |x - 2001|$.

$(\frac{2}{3}; \infty-)$

54. (МГУ, экономич. ф-т, 2001) $|x^2 - 8x + 15| \leq |15 - x^2|$.

$(\infty+; 7] \cap [\frac{7}{9}; 0)$

55. (МГУ, химический ф-т, 2001)

$$\frac{1}{|x - 1|} > \frac{1}{|x + 1|}.$$

$(\infty+; 1) \cap (1; 0)$

56. (МГУ, биологич. ф-т, 1998) $|x^2 + 3x| + |x + 5| \leq x^2 + 4x + 9$.

$(\infty+; 1-] \cap [2-; 2-)$

57. («Покори Воробьёвы горы!», 2006) $|x + 3| - |x^2 + x - 2| \geq 1$.

$[2; 0] \cap \{2-\}$

58. (МГУ, мехмат, 2008.1) $||1 - x^2| - |x^2 - 3x + 2|| \geq 3|x - 1|$.

$(\infty+; 2] \cap \{1\} \cap [1-; \infty-)$

59. («Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11.2)

$$||2 + x - x^2| - |x + 1|| \geq |x^2 - 2x - 3|.$$

$(\infty+; 2] \cap \{1-\}$

60. (МГУ, мехмат, 1999-05.3) Найти все x , при которых хотя бы одно из двух выражений

$$|x - 3| (|x - 5| - |x - 3|) - 6x \quad \text{и} \quad |x| (|x| - |x - 8|) + 24$$

неположительно, а его модуль не меньше модуля другого.

$[5; 8]$