

Минимаксные задачи и логарифмы

Мы продолжаем рассмотрение минимаксных уравнений и неравенств, которое было начато в листках «Минимаксные задачи в алгебре» и «Минимаксные задачи в тригонометрии». Данный листок посвящён минимаксным задачам с участием показательных и логарифмических функций.

ЗАДАЧА 1. Решить уравнение

$$3^{x^2+1} = 2 \cos x + 1. \quad (1)$$

РЕШЕНИЕ. Одновременное присутствие показательной и тригонометрической функций говорит о том, что обычные методы тут не работают. Однако нас выручает минимаксная идея.

Заметим, что $x^2 \geq 0$ при всех x , и потому $3^{x^2+1} \geq 3$. Вместе с тем имеем $\cos x \leq 1$, откуда $2 \cos x + 1 \leq 3$. Итак, левая часть нашего уравнения не меньше 3, а правая часть не больше 3; следовательно, равенство в (1) возможно лишь в том случае, когда обе части *одновременно* равны 3. Иными словами, уравнение (1) равносильно системе

$$\begin{cases} 3^{|x|+1} = 3, \\ 2 \cos x + 1 = 3. \end{cases}$$

Из первого уравнения полученной системы находим $x = 0$. Подставляем во второе уравнение системы и убеждаемся, что $x = 0$ годится. Следовательно, это и есть ответ.

ОТВЕТ: 0.

ЗАДАЧА 2. Решить уравнение:

$$6x - x^2 - 7 = \log_2(4 + |x - 3|).$$

РЕШЕНИЕ. Для левой части имеем оценку сверху:

$$6x - x^2 - 7 = 2 - (x - 3)^2 \leq 2.$$

В то же время, поскольку $|x - 3| \geq 0$, для правой части получаем оценку снизу:

$$\log_2(4 + |x - 3|) \geq \log_2 4 = 2.$$

Следовательно, наше уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 6x - x^2 - 7 = 2, \\ \log_2(4 + |x - 3|) = 2, \end{cases}$$

откуда $x = 3$.

ОТВЕТ: 3.

ЗАДАЧА 3. (МГУ, ИСАА, 1999) Решить систему:

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 \leq 65 - x^4 - 3^{x+3}, \\ x^2 + 3^{x+2} \geq y^2 - 2y + 25. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Умножая второе неравенство на 3, перепишем систему в виде двойного неравенства:

$$3y^2 - 6y + 75 - 3x^2 \leq 3^{x+3} \leq 65 - x^4 - x^2 + 2y^2. \quad (2)$$

Для выполнения неравенства (2) необходимо (но не достаточно!), чтобы выполнялось более слабое неравенство

$$3y^2 - 6y + 75 - 3x^2 \leq 65 - x^4 - x^2 + 2y^2, \quad (3)$$

которое легко приводится к виду

$$(x^2 - 1)^2 + (y - 3)^2 \leq 0.$$

Отсюда находим $x = \pm 1$, $y = 3$.

Однако, повторяем, неравенство (3) является следствием неравенства (2), но не равносильно ему; иными словами, неравенство (3) может иметь решения, не являющиеся решениями неравенства (2). Следовательно, найденные значения x и y надо проверить.

Подставляя поочерёдно пары $(1, 3)$ и $(-1, 3)$ в неравенство (2), убеждаемся, что первая пара годится, а вторая — нет.

ОТВЕТ: $(1, 3)$.

ЗАДАЧА 4. (МГУ, ф-т психологии, 1984) Решить систему:

$$\begin{cases} 3^{2x+y-1} + 4 \cdot 3^{2x-1} \leq 2, \\ 4x + y \geq 2 - \log_3 4. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. К левой части первого неравенства применим неравенство $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ (справедливое для неотрицательных a и b):

$$3^{2x+y-1} + 4 \cdot 3^{2x-1} \geq 2\sqrt{3^{2x+y-1} \cdot 4 \cdot 3^{2x-1}} = 4\sqrt{3^{4x+y-2}}. \quad (4)$$

Теперь с учётом второго неравенства системы получаем:

$$3^{2x+y-1} + 4 \cdot 3^{2x-1} \geq 4\sqrt{3^{2-\log_3 4-2}} = 2. \quad (5)$$

В то же время первое неравенство системы даёт обратную оценку. Следовательно, должно выполняться равенство

$$3^{2x+y-1} + 4 \cdot 3^{2x-1} = 2.$$

А оно будет иметь место только одновременном достижении равенства в (4) и (5), то есть при равенстве слагаемых и, кроме того, при достижении равенства во втором неравенстве системы:

$$\begin{cases} 3^{2x+y-1} = 4 \cdot 3^{2x-1} = 1, \\ 4x + y = 2 - \log_3 4. \end{cases}$$

Дальнейшее элементарно.

ОТВЕТ: $x = \frac{1-\log_3 4}{2}$, $y = \log_3 4$.

Задачи

1. Решить уравнение:

$$\log_3(x^2 + 9) = 2 \cos x.$$

$$\boxed{0 = x}$$

2. Решить уравнение:

$$1 + \sin^2 \pi x = 2^{-|x+7|}.$$

$$\boxed{2^{-x} = x}$$

3. Решить уравнение:

$$2 \cos x = 2^x + 2^{-x}.$$

$$\boxed{0 = x}$$

4. (ОММО, 2010) Найдите все решения системы

$$\begin{cases} \log_2(x^2 + 1) + \log_2(y^2 + 1) = 4, \\ x^2 + y^2 = 2 \cos^2 z + 4. \end{cases}$$

$$\boxed{\mathbb{Z} \ni u \text{ ' } u \nu = z \text{ ' } \underline{\xi} \wedge \mp = \bar{n} \text{ ' } \underline{\xi} \wedge \mp = x}$$

5. Решить уравнение:

$$\log_3 \pi x + \log_{\pi x} 3 = \frac{2}{\sin^2(x+y) - 2 \sin(x+y) + 2}.$$

$$\boxed{\mathbb{Z} \ni u \text{ ' } \frac{u}{\xi} - u \nu \zeta + \frac{\zeta}{\nu} = \bar{n} \text{ ' } \frac{u}{\xi} = x}$$

6. Решить неравенство:

$$\text{а) } 2^{-|x-2|} \log_2(4x - x^2 - 2) \geq 1; \quad \text{б) } (4x - x^2 - 3) \log_2(1 + \cos^2 \pi x) \geq 1.$$

$$\boxed{\zeta = x \text{ (} \bar{g} \text{ ' } \zeta = x \text{ (} \bar{v}$$

7. («Покори Воробьёвы горы!», 2017) Решите уравнение

$$\log_3(2x^2 + 4x + 29) + \log_{\frac{1}{2}}(31 - 2x - x^2) = \log_{\frac{1}{5}}(3x^2 + 6x + 28).$$

$$\boxed{1-}$$

8. (МГУ, химический ф-т, 1993) Решить уравнение:

$$2(1 + \sin^2(x - 1)) = 2^{2x-x^2}.$$

1 = x

9. (МГУ, географич. ф-т, 1994) Решить уравнение:

$$\log_{\frac{1}{2}}(\operatorname{tg} \pi x + \operatorname{ctg} \pi x) = 8(2x^2 + 3x + 1).$$

$\frac{7}{8} = x$

10. (МГУ, мехмат, 1999-03.2) Решить систему

$$\begin{cases} 2^{x+2} = \frac{49}{4}x^2 + 4, \\ 2^{x+2} - 4 \leq x^2(14 - 2^{x+2}) \cdot 2^x. \end{cases}$$

0

11. (МГУ, мехмат, 1999-07.2) Решить уравнение

$$|\log_2(2x + 7)| = \log_2(1 + |x + 3|) + \log_2(1 - |x + 3|).$$

ε-

12. (МГУ, мехмат, 2005.2) Найти $\log_2 \frac{2x}{2^x}$ при условии

$$|\log_{\sqrt{2}} x^{x/2} - 2 \log_2 x| + ||2 - x| - |\log_2 x|| \leq (x - 2) \log_8 x^3.$$

1-

13. (МГУ, мехмат, 1997) Решить систему:

$$\begin{cases} |x + 1| - 1 \leq x, \\ (2^x + 2^{x-2} + 2^{2-x}) \cos \frac{\pi x}{2} + \cos \pi x + 3 + 2^{2x-3} = 0. \end{cases}$$

z = x

14. (МГУ, ИСАА, 1999) Решить систему:

$$\begin{cases} 2x^2 - \log_2(y\sqrt{2} + 6)^3 - 16 \geq y^4 - 3x - y^2, \\ x^2 - y^2 \leq \log_2(y\sqrt{2} + 6) + x + 1. \end{cases}$$

$$\boxed{x = 1}$$

15. (МГУ, ф-т психологии, 1984) Решить систему:

$$\begin{cases} 3^{x+2y-1} + 2 \cdot 3^{3y-1} \leq 2, \\ x + 5y \geq 2 - \log_3 2. \end{cases}$$

$$\boxed{x = 1}$$

16. (МГУ, ф-т почвоведения, 1989) Решить неравенство:

$$\left(x - x^2 - \frac{5}{4}\right) \cdot \log_{\sqrt{3}}(2 + 2\cos^2 x - \cos 2x + 3\cos^2 \pi x) \geq -2.$$

$$\boxed{x = 1}$$

17. (МГУ, филологич. ф-т, 1998) Решить неравенство:

$$\sqrt[4]{13 + 3^{31 - \cos x}} \leq \sqrt{5e^{-2x^2} - 1}.$$

$$\boxed{0 = x}$$

18. (МГУ, химический ф-т, 2000) Решить уравнение:

$$2^{2\sin^2 x} + 2^{2\frac{\cos 2x}{2}} = 2^{1 + \sqrt[4]{2}}.$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{4}}$$

19. (МГУ, химический ф-т, 1979) Найти все решения системы

$$\begin{cases} y \sin x = \log_2 \left| \frac{y \sin x}{1 + 3y} \right|, \\ (6y^2 + 2y) (4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x}) = 25y^2 + 6y + 1 \end{cases}$$

такие, что $|y| \leq 1$.

$$\boxed{x = \frac{\pi}{4}, y = 1}$$