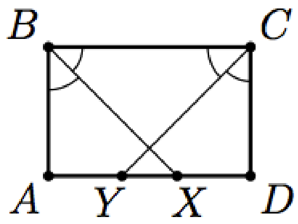
Медианы, высоты, биссектрисы

Задача 1. (*Всеросс., 2018, ШЭ, 8.2*) В прямоугольнике $ABCD$ сторона AB равна 6, сторона BC равна 11. Из вершин B и C проведены биссектрисы углов, пересекающие сторону AD в точках X и Y соответственно. Найдите длину отрезка XY.



$\boxed{1}$

Задача 2. (*Всеросс., 2016, ШЭ, 8.5*) В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB на стороне CB выбрана точка D так, что $CD = AC - AB$. Точка M — середина AD. Докажите, что угол BMC — тупой.

Задача 3. (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2013, 8–9*) В треугольнике ABC биссектриса AK перпендикулярна медиане CL. Докажите, что в треугольнике BKL также одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

Задача 4. (*Турнир городов, 2014, 8–9*) В треугольнике ABC угол C — прямой. На катете CB как на диаметре во внешнюю сторону построена полуокружность, точка N — середина этой полуокружности. Докажите, что прямая AN делит пополам биссектрису угла C.

Задача 5. (*Турнир городов, 2010, 8–9*) На сторонах BC и CD ромба $ABCD$ взяли точки P и Q соответственно так, что $BP = CQ$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника APQ лежит на диагонали BD ромба.

Задача 6. (*Турнир городов, 2016, 8–9*) На листе бумаги синим карандашом нарисовали треугольник, а затем провели в нём красным карандашом медиану, биссектрису и высоту (возможно, не все из разных вершин), лежащие внутри треугольника. Получили разбиение треугольника на части. Мог ли среди этих частей оказаться равносторонний треугольник с красными сторонами?

Задача 7. (*ММО, 2016, 8.3*) На медиане AM треугольника ABC нашлась такая точка K, что $AK = BM$. Кроме того, $\angle AMC = 60°$. Докажите, что $AC = BK$.

Задача 8. (*Олимпиада им. Эйлера, РЭ, 2016.8*) Точки M и N — середины биссектрис AK и CL треугольника ABC соответственно. Докажите, что угол ABC прямой тогда и только тогда, когда $\angle MBN = 45°$.

Задача 9. (*ММО, 2016, 9.2*) В треугольнике ABC на продолжении медианы CM за точку C отметили точку K так, что $AM = CK$. Известно, что угол BMC равен $60°$. Докажите, что $AC = BK$.

Задача 10. (*ММО, 2015, 10.5*) Дан треугольник ABC. Проведены высота AH и медиана CM. Обозначим точку их пересечения через P. Высота, проведённая из вершины B треугольника, пересекается с перпендикуляром, опущенным из точки H на прямую CM, в точке Q. Докажите, что прямые CQ и BP перпендикулярны.

Задача 11. (*МГУ, мехмат, 2003-03.3*) На продолжении биссектрисы AL треугольника ABC за точку A взята такая точка D, что $AD = 10$ и $\angle BDC = \angle BAL = 60°$. Найти площадь треугольника ABC. Какова наименьшая площадь треугольника BDC при данных условиях?

$\boxed{25\sqrt{3};\ 75\sqrt{3}}$